Научном већу Института за физику

Предмет: Молба за покретање поступка за реизбор у звање виши научни сарадник

Молим Научно веће Института за физику у Београду да у складу са Правилником о поступку и начину вредновања и квантитативном исказивању научно-истраживачких резултата истраживача покрене поступак за мој реизбор у звање виши научни сарадник.

У прилогу достављам:

1. Мишљење руководица пројекта са предлогом чланова комисије за избор у звање
2. Стручну биографију
3. Преглед научне активности
4. Елементе за квалитативну анализу научног доприноса
5. Елементе за квантитативну анализу научног доприноса
6. Списак објављених радова и њихове копије
7. Потрвде о цитираности радова (архива INSPIRE, GoogleScholar, Scopus, ThomsonReuters)
8. Фотокопију о решења о избору у претходно звање
9. Додатке

Београд, 04.07.2018. године

др Бојан Николић
виши научни сарадник Института за физику

Научном већу Института за физику

Мишљење руководиоца пројекта о реизбору др Бојана Николића у звање виши научни сарадник

Др Бојан Николић је запослен на Институту за физику Универзитета у Београду у Групи за гравитацију, честице и поља. Ангажован је на пројекту основних истраживања Министарства просвете, науке и технолошког развоја (МПНТР) ОН 171031 "Физичке импликације модификованог простор–времена". На поменутом пројекту др Бојан Николић ради на темама везаним за теорију струна. С обзиром да испуњава све предвиђене услове у складу са Правилником о поступку, начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача МНПТР, сагласна сам са покретањем поступка реизбора у звање виши научни сарадник и молим Научно веће Института за физику да покрене поступак за реизбор др Бојана Николића у наведено звање.

За комисију за реизбор др Бојана Николића у звање виши научни сарадник предлажем

1. проф. др Воја Радовановић, редовни професор, Физички факултет
2. др Бранислав Саздовић, научни саветник, Институт за физику
3. проф. др Маја Бурић, редовни професор, Физички факултет.

Београд, 28. 06. 2018.

Руководилац пројекта ОН 171031

Maja Burić

проф. др Маја Бурић

Биографија са прегледом научне активности

1 Стручно-биографски подаци

Рођен сам 10. 04. 1979. године у Зајечару. У Књажевцу сам завршио основну школу и гимназију природно-математичког смера као ђак генерације.

Године 1998. уписао сам основне студије на Физичком факултету Универзитета у Београду, смер Теоријска и експериментална физика. Дипломирао сам 2002. године као први у генерацији са просечном оценом 9,81. Постдипломске студије на смеру ,,Теоријска физика елементарних честица и гравитације" уписао сам 2002., а магистарски рад са темом *Ефекат дилатонског поља на некомутативност просторно-временских координата* сам одбранио 2006. године на Физичком факултету Универзитета у Београду. Докторску дисертацију под насловом *Некомутативност и димензионалност Dp-бране* одбранио сам 2008. године такође на Физичком факултету Универзитета у Београду. Ментор магистарске тезе и докторске дисертације био је професор др Бранислав Саздовић.

Од 01. 11. 2003. године, запослен сам у Центру за теоријску физику Института за физику као истраживач приправник, у оквиру пројекта ,,Градијентне теорије гравитације: симетрије и динамика" Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Од 2006. до 2010. године био сам на пројекту "Алтернативне теорије гравитације", док сам од почетка 2011. године ангажован на пројекту Министарства просвете и науке "Физичке импликације модификованог простор-времена". Године 2007. изабран сам у звање истраживач сарадник, у октобру 2009. у звање научни сарадник, а у садашње звање вишег научног сарадника изабран сам јануара 2014. године.

Од 2004.-2006. године био сам члан редакције часописа ,,Млади физичар". У периоду од децембра 2004. године до августа 2005. године био сам на одслужењу војног рока. Активно сам учествовао у обележавању Светске године физике 2005. године, посебно у организацији такмичења ,,Откривамо таленте за физику". Био сам три пута члан локалног организационог комитета међународне школе и конференције из модерне математичке физике. Од априла до јула 2008. године био сам на стручном усавршавању на Институту за нуклеарна истраживања и нуклеарну енергју у Софији (Бугарска) у оквиру ОП6 Марија Кири истраживачке тренинг мреже "Forces-Universe" MRTN-CT-2004-005104. Био сам члан Државне комисије за такмичења ученика средњих школа школске 2011/2012 и 2012/2013. У периоду од 01. јула 2012.

до 24. децембра 2012. био сам на стручном усавршавању у Центру за теоријску физику "Арнолд Зомерфелд" у Минхену у групи професора Дитера Листа, једног од водећих физичара у области теорије струна. Године 2015. сам одржао предавање у САНУ у оквиру једнодеменевног скупа поводом сто година опште теорије релативности (ОТР). У оквиру XXXIV Републичког семинара наставника физике 2016. године одржао сам предавање по позиву о открићу гравитационих таласа "Гравитациони таласи-од открића до директне детекције". Рад је објављен у трећем броју часописа "Настава физике".

Школске 2013/2014 радио сам као наставник физике у одељењу трећег разреда Математичке гимназије, док од школске 2015/2016 радим као наставник Рачунског практикума 1 и Рачунског практикума 2 у одељењу за децу са посебним способностима за физику у Земунској гимназији. Био сам ментор више матурских радова као и два мастер рада на Физичком факултету у Београду.

Од 2009. године сам ожењен и отац сина Стојана (2010) и ћерки, Анастасије (2012) и Савке (2015).

2 Преглед научне активности

Мој научни рад је у области **физике високих енергија**. Ангажован сам на основним истраживањима у групи за гравитацију, честице и поља Института за физику, у оквиру пројекта ,,Физичке импликације модификованог простор-времена". Основна тема мог истраживачког рада односи се на анализу бозонске струне и суперструне, некомутативност као последицу наметнутих граничних услова и T-дуалност.

2.1 Теорија бозонске струне са дилатоном и некомутативност

Један од предмета мог интересовања је бозонска струна у присуству гравитационог поља $G_{\mu\nu}(x)$ и антисиметричног тензорског поља $B_{\mu\nu}(x)$. За реализацију кључне особине овакве теорије, конформне инваријантности на квантном нивоу, потребно је додати још једно позадинско поље–дилатонско поље $\Phi(x)$. Сва три позадинска поља морају задовољавати просторно-временске једначине које следе из услова конформне инваријантности, што формалним језиком значи да су β-функције које одговарају гравитационом $G_{\mu\nu}$ и антисиметричном Калб-Рамоновом пољу $B_{\mu\nu}$ једнаке нули, док трећа, која одговара дилатону, може бити нула или константа. Случај у коме је β-функција која одговара дилатонском пољу једнака константи захтева додавање Лиувиловог члана у дејство.

У теорији отворене струне поред једначина кретања од посебне важности су гранични услови. Многострукост са p просторних димензија, дефинисана скупом Дирихлеових граничних услова на крајевима отворене струне, назива се Dp-брана.

У анализи сам користио канонске методе и третирао граничне услове као канонске везе. За случај отворене струне у присуству константног гравитационог и антисиметричног тензорског поља некомутативне релације су већ биле изведене другим методама, укључујући и канонски. У новом приступу, уместо увођења Дираксових заграда решене су везе које потичу од граничних услова. Добијено решење за координате, зависи не само од ефективних координата већ и од ефективних импулса. То објашњава чињеницу да је Поасонова заграда координата различита од нуле.

Мој оригинални допринос је укључивање линеарног дилатонског поља $\Phi(x) = \Phi_0 + a_i x^i$, које је одабрано тако да позадинска поља задовољавају просторно-временске једначине кретања. Поред очекиване зависности некомутативног параметра од дилатонског поља појављу се и два на први поглед неочекивана резултата. Јавља се једна комутативна координата, а у случају додатних релација између позадинских поља смањује се димензија Dp-бране.

1. B. Nikolic and B. Sazdovic, Gauge symmetries decrease the number of Dp-brane dimensions, Phys. Rev. D 74 (2006) 045024.

2. B. Nikolic and B. Sazdovic, Gauge symmetries decrease the number of Dp-brane dimensions. II. Inclusion of the Liouville term, Phys. Rev. D 75 (2007) 085011.

3. B. Nikolic and B. Sazdovic, Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, Adv. Theor. Math. Phys. 14 (2010) 1.

2.2 Некомутативност и Т-дуалност суперструна

Теорија суперструне садржи, поред бозонских, и фермионска поља. Она су повезана суперсиметријом која је потребна због конзистентности саме теорије (елиминација тахиона). Испоставља се да постоји пет конзистентних теорија суперструне: тип I, тип IIA, тип IIB и две хетеротичке теорије суперструне. Ове теорије међусобно су повезане мрежом дуалности. Теорија типа IIB описује суперструну са $N = 2$ суперсиметријом и фермионским координатама исте киралности, док су спинори у тип IIA теорији супротне киралности. Тип I је суперструна са експлицитном $N = 1$ суперсиметријом.

У мом раду посебно место заузима проучавање T-дуалних трансформација тип II теорије суперструне и однос некомутативности и T-дуалности. Процедура Т-дуализације је таква по конструкцији да су иницијална и Т-дуална теорија физички еквивалентне, а та физичка еквивалентност има за последицу одржање броја бозонских и фермионских степени слободе. Стандардан начин Т-дуализације је Бушерова процедура која предствља локализацију транслационе симетрије уз увођење додатног члана у дејству који нам омогућава еквиваленцију са почетном теоријом. Фиксирањем иницијалних координата D димезионог простора добијамо теорију која зависи од градијентних поља и дуалних координата. На једначинама кретања за градијентна поља добија се дуална теорија.

У литератури је дуго времена проучавана само бозонска Т-дуалност. Међутим, недавно, у оквиру анализе симетрија амплитуда глуонских расејања, откривена је фермионска T-дуалност. Формално, она представља исти тип трансформације као и бозонска T дуалност. Реализује се локализацијом транслационе симетрије фермионских координата. Применом Бушерове процедуре може се добити фермионски T-дуална теорија.

Метод развијен у анализи бозонске струне, применио сам на теорију суперструна типа IIB. Гранични услови су изабрани тако да је очувана $N = 1$ суперсиметрија од иницијалне $N = 2$ суперсиметрије типа IIB суперструне (гранични услови за бозонске координате су Нојманови). Решавањем граничних услова добија се некомутативност координата иницијалног простора и ефективна теорија, као иницијална теорија на решењу граничних услова. С друге стране извршена је T дуализација теорије типа IIB суперструне са константним позадинским пољима. T-дуална поља која су непарна на трансформацију парности светске површи $\Omega : \sigma \to -\sigma$ представљају некомутативне параметре док су поља која су Ω парна представљају поља ефективне теорије. Такође показано је и да Нојманови гранични услови прелазе у Дирихлеове граничне услове.

Ефективна теорија која се добија у претходно описаном случају је тип I теорија суперструне. С обзиром да је $D5$-брана стабилна и у тип IIB и тип I теорији суперструне, анализирана је некомутативност и T-дуалност тип IIB суперструне са $D5$-браном. Бозонским координатама бране се намећу Нојманови а преосталим бозонским координатама Дирихлеови гранични услови. Фермионске променљиве задовољавају идентичне граничне услове само расписане преко независних 6-то димезионих спинора. Физички смисао резултата је исти као и у случају када се Нојманови гранични услови намећу свим бозонским координатама.

Такође, у контеткшту некомутативности, бавио сам се и фермионским T дуалностима тип IIB суперструне. Наметањем Дирихлеових граничних услова на све координате добија се некомутативност импулса иницијалне теорије. Некомутативни параметри су (до на константу) нека од поља фермионске T дуалне теорије.

1. B. Nikolic and B. Sazdovic, Type I background fields in terms of type IIB ones, Phys. Lett. B666 (2008) 400.

2. B. Nikolic and B. Sazdovic, D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach, Nucl. Phys. B 836 (2010) 100–126.

3. B. Nikolic and B. Sazdovic, Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry, JHEP 08 (2010) 037.

4. B. Nikolic and B. Sazdovic, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, Phys. Rev. D 84 (2011) 065012.

5. B. Nikolic and B. Sazdovic, Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality, JHEP 06 (2012) 101.

2.3 Т-дуалност и некомутативност затворене струне

Једна од врло актуелних тема у области теорије струна је проучавање Т-дуалности и њено повезивање са некомутативношћу затворене струне. У случају затворене бозонске струне која пропагира у просторвремену константне метрике и у присуству константног Калб-Рамоновог поља, координате комутирају. Задржавањем констатне метрике и увођењем слабог Калб-Рамоновог поља које зависи линеарно од координата (у складу са просторно-временским једначинама за позадинска поља) не губи се транслациона симетрија теорије али се добија, применом уопштене Бишерове процедуре, један наизглед неочекиван резултат - некомутативност координата затворене струне. Слично као у теорији отворене струне, у теорији затворене струне некомутативност следи из чињенице да се применом уопштене Бушерове процедуре добија да изводи Т-дуалних координата зависе од канонских импулса и извода координата почетне теорије. Стандарно се у литератури проучавају координатно зависна позадинска поља али се Т-дуализација врши дуж изометријских праваца - праваца од којих позадинска поља не зависе уз примену нетривијалних услова намотавања. Примена уопштене Бушерове процедуре омогућава дуализацију дуж свих праваца и добијање некомутативности и неасоцијативности уз тривијалне услове намотавања. Такође у добијеној T-дуалној теорији нелокалност је манифестна.

1. Lj. Davidovic, B. Nikolic, B. Sazdovic, Canonical approach to the closed string noncommutativity, Eur. Phys. J C74 (2014) 2734.

2. Lj. Davidovic, B. Nikolic, B. Sazdovic, T-duality diagram for a weakly curved background, Eur. Phys. J C75 (2015) 576.

3. B. Nikolic and D. Obric, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal background, Fortsch. Phys. 66 (2018) 040009.

2.4 T-дуалност и удвостручени простори

Када говоримо о T-дуалности говоримо о трансформацији која повезује физички еквивалентне теорије. Уколико бисмо удвостручили простор тако да иницијалним координатама x^μ додамо T-дуалне координате y_μ, онда можемо говорити о T-дуалности као симетрији теорије. Идеја о удвостученим просторима је стара око две деценије, а посебно је занимљива у проучавању T-дуалности. У удвостученом простору T-дуалност се репрезентује матрицом пермутације подскупа координата које дуализујемо и одговарајућег подскупа T-дуалних координата. Из захтева да закон T-дуалне трансформације буде исти за удвостручене координате Z^M и њима T-дуалне ${}_aZ^M$ добијају се изрази за T-дуална позадинска поља преко иницијалних позадинских поља. Показано је да је T-дуализација у оквиру формализма удвостручених простора еквивалентна са резултатима из Бушерове процедуре која се може сматрати дефиницијом T-дуалности, како за бозонску тако и за фермионску. У анализама је коришћен модел тип II суперструне у формулацији чистог спинора са константним позадинским пољима. Даљи рад подразумева испитивање општег случаја у којем је једина апроксимација да позадинска поља не зависе од праваца дуж којих се дуализује. Проучавање T-дуализације у удвостученим просторима представља и мали корак ка бољем разумевање M-теорије. Једна T-дуализација преводи типIIA/B у типIIB/A, а формализам удвостручених простора обједињује те две теорије у једну.

1. B. Nikolic and B. Sazdovic, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl. Phys. B917 (2017) 105-121.

2. B. Nikolic and B. Sazdovic, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur. Phys. J. C77 (2017) 197.

Напомена: Подвучене теме су рађене у периоду од избора у садашње звање.

1 Елементи за квалитативну анализу рада

1.1 Квалитет научних резултата

1.1.1 Научни ниво и значај резултата, утицај научних радова

Др Бојан Николић је током научне каријере објавио укупно 17 радова у међународним часописима са рецензијом, од чега 13 категорије M21, 1 категорије M22 и 3 категорије M23. Укупан импакт фактор радова је **63,436**. Од одлуке Научног већа о предлогу за стицање звања виши научни сарадник др Николић је објавио 5 радова категорије M21. Укупан импакт фактор ових радова је **21,716**.

Као најзначајнији рад у избором периоду кандидата Комисија истиче:

Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, Canonical approach to closed string noncommutativity, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2734.

У раду је анализирана бозонска струна у слабо закривљеном простору са константном метриком и линеарно зависним Калб-Рамоновим пољем. Коришћењем уопштене Т-дуализационе процедуре и канонског формализма, добијени су трансформациони закони који су даље искоришћени за налажење Поасонових заграда дуалних координата. Показано је да су у случају ненулте вредности јачине Калб-Рамоновог поља Поасонове заграде Т-дуалних координата пропорционалне броју намотаја. Пошто су добијене Поасонове заграде Т-дуалних координата координатно зависне, у Т-дуалној слици се појављује и неасоцијативност. Један од резултата јесте и да је добијена Т-дуална теорија нелокална.

1.1.2 Позитивна цитираност научних радова

Према бази Scopus Хиршов индекс кандидата је 7, а број цитата 100.

Непосредним увидом у списак радова и цитата добијамо да је укупан број цитата 136. Број цитата **без аутоцитата и цитата коаутора** је 16, док је Хиршов индекс 3.

Прилог: листе цитираности из четири базе као и детаљан списак радова који цитирају радове кандидата.

1.1.3 Параметри квалитета часописа

Др Бојан Николић је током каријере објавио укупно 17 радова у часописима са ИСИ листе од тога 13 категорије M21, 1 категорије M22 и 3 категорије M23. Укупан импакт фактор радова је 63,436. Од одлуке

Научног већа о предлогу за стицање звања виши научни сарадник др Николић је објавио 5 радова категорије М21. Укупан импакт фактор ових радова је 21,716.

Збирно приказано др Николић је објавио:

- 2 рада у Journal of High Energy Physics, (средњи ИФ=5.931)
- 3 рада у Physical Review D, (средњи ИФ= 4.728)
- 3 рада у European Physical Journal C, (средњи ИФ=4.759)
- 2 рада у Nuclear Physics B(средњи, ИФ=3.055)
- 2 рада у Fortschritte der Physik, (ИФ=3.263)
- 2 рада у Romanian Journal of Physics, (ИФ=0.684)
- 1 рад у Advances of Theoretical and Mathematical Physics, (ИФ=1.736)
- 1 рад у Physics Letters B, (ИФ=4.034)
- 1 рад у International Journal of Modern Physics A, (ИФ=0.941)

После одлуке Научног већа о предлогу за стицање звања виши научни сарадник др Николић је објавио:

- 3 рада у European Physical Journal C ($ИФ_{2014}$ =5.084, $ИФ_{2015}$ =4.912, $ИФ_{2017}$ =5.172)
- 1 рад у Nuclear Physics B (ИФ=3.285)
- 1 рад у Fortschritte der Physik (ИФ=3.263)

Подаци о додатним библиометријским параметрима квалитета часописа у којима је кандидат објављивао радове категорије М20 у изборном периоду дате су у доњој табели.

	ИФ	**М**	**СНИП**
Укупно	21.716	40	6.027
Усредњено по чланку	4.343	8	1.205
Усредњено по аутору	9.193	17.333	2.572

1.1.4 Степен самосталности и степен учешћа у реализацији радова у научним центрима у земљи и иностранству

Од избора у звање виши научни сарадник (29.01.2014.год.) др Николић је покренуо нове правце истраживања који раније нису постојали у Србији. Прва тема из те групе је фермионска Т-дуалност. У теорији стандардно постоји бозонска Т-дуализација која се технички одвији преко Бушерове Т-дуализационе процедуре. Недавно је група истраживача око проф. Малдацене и проф. Натана Берковица из Бразила проучавајући амплитуде расејања глуона пронашла фермионску Т-дуалност. Она се имплементира математички применом Бусчерове процедуре само се дуализује дуж фермионских праваца θ^α и $\bar{\theta}^\alpha$. У сарадњи са др Бахматовим који је био постдокторант код проф. Берковица, добијена је некомутативност фермионских импулса у тип II теоријама суперструна користећи се фермионском Т-дуалношћу. Такође разјашњен је утицај позадинских поља на некомутативне параметре.

Друга тема из групе нових праваца истраживања је некомутативност затворене бозонске струне. Са овом темом се кандидат упознао у току шестомесечног боравка у Минхену у оквиру програма стипендирања постдоктораната од стране Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Творац те идеје је проф. Дитер Лист са Лудвиг Максимилијан Универзитета у Минхену и један од водећих физичара у области теорије струна. У комбинацији са уопштеном Т-дуализационом процедуром развијеном на Институту за физику, добијена је генерализација резултата групе Дитера Листа. Такође као последица некомутативности добијен је конкретан облик релација неасоцијативности за случај бозонске струне у слабо закривљеном простору.

Тема мастер рада Данијела Обрића је у вези са проблематиком некомутативности и неасоцијативности $3D$ торуса. Рад је успешно одбрањен а резултати рада су публиковани у часопису категорије $M21$ Fortschritte der Physik.

Трећа тема која је уведена у последњих неколико година је у тема удвостручених простора. Идеја је да се направи двоструки простор уједињавањем иницијалних и Т-дуалних координата. Т-дуалност постаје симетрија и може се матрично репрезентовати матрицом пермутације. Извршена је анализа бозонске и фермионске Т-дуалности тип II суперструне у удвостручeним просторима. Добијени резултати су у сагласности са стандардном Т-дуализационом (Бусчеровом) процедуром.

1.2 Ангажованост у развоју услова за научни рад, образовању и формирању научних кадрова

Под менторством др Николића урађене су два мастер рада. Мастер рад Миливоја Јојића "Т-дуалност на торусу преко комплексних параметара" урађен је и успешно одбрањен 2015. године на Физичком факултету Универзитета у Београду, док је мастер рад Данијела Обрића "Некомутативност и неасоцијативност затворене бозонске струне" успешно одбранјен на Физичком факултету 2017. године. Резултати рада су публиковани у часопису $M21$ категорије,

B. Nikolic, D. Obric, Fortschritte der Physik **66** (2018) 040009.

Кандидат је школске 2013/2014 радио као спољни сарадник-професор физике у Математичкој гимназији. Од 2015/2016 ангажован је као наставник на предметима Рачунски практикум 1 и 2 у посебном одељењу за ученике посебно надарене за физику у Земунској гимназији.

Прилог: уговор о ангажовању у Земунској гимназији као и записници са седница Наставно-научног већа Физичког факултета у Београду на којима су одобрене мастер тезе поменутих кандидата.

1.3 Нормирање броја коауторских радова, патената и техничких решења

Број аутора у радовима кандидата др Николића је максимално 3 а најчешће 2 што се у теоријској физици сматра за стопроцентни допринос (и према Правилнику тек за број аутора>3 постоји коауторски допринос). Укупан број М-бодова је 40.

Прилог: списак радова кандидата.

1.4 Руковођење пројектима, потпројектима и пројектним задацима

Др Бојан Николић руководи потпројектом "Т-дуализација отворене и затворене (супер)струне" у оквиру пројекта Министарства просвете, науке и технолошког развоја ОН 171031 и Групе за гравитацију, честице и поља Института за физику Београд.

Прилог: потврда руководиоца пројекта.

1.5 Активност у научно стручним друштвима

Др Бојан Николић је у два наврата био члан Државне комисије ДФС за такмичење ученика средњих школа - 2003.-2005. и 2011.-2013., и као аутор задатака и као прегледач. У периоду 2004. до 2006. члан је редакције часописа Млади физичар, који издаје ДФС у сврху популаризације физике. Активно је учествовао у обележавању Светске године физике на Институту за физику. Члан је локалних организационих комитета више међународних и домаћих конференција и радионица организованих од стране Института за физику или Групе за гравитацију, честице и поља.

Прилог: копија "Младог физичара", одштампане интернет странице школа и конференција.

1.6 Утицајност научних резултата

Цитираност као и квалитет часописа (висок ИФ) у којима др Николић публикује говоре о квалитету добијених резултата. Рад из 2007. године

B. Nikolic and B. Sazdovic, Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, Adv. Theor. Math. Phys. **14** (2010) 1,

је објављен у свесци са још само 5 радова од којих је један рад дело Едварда Витена, водећег експерта у области математичке физике и теорије струна.

Прилог: копија прве стране часописа.

1.7 Конкретан допринос кандидата у реализацији радова у центрима у земљи и иностранству

Др Николић је донео две нове теме у групу која се бави теоријом струна (др Бранислав Саздовић, др Љубица Давидовић, докторанд Илија Иванишевић, др Бојан Николић). Прва је фермионска Т-дуалност (проистекла из кореспонденције са др Иљом Бахматовим) а друга некомутативност затворене струне током постдокторског боравка у групи проф. Листа. У оквиру прве теме др Николић је применио фермионску Т-дуалност на случај тип II теорије суперструне у формулацији чистог спинора. Др Николић је учествовао како у аналитичком рачунању тако и у интерпретацији резултата припреми чланка али и у комуникацији са реферијим као кореспондентни аутор.

Другу споменуту тему, некомутативност затворене струне, др Николић је учио директно од њеног аутора проф. Луест-а током боравка у Минхену. По повратку из Минхена идеја је комбинована са уопштеном Т-дуализационом процедуром која је већ била развијена у Институту за физику. Резултат је генерализација резултата добијених у групи др.

Листа-а као и значајно поједностављење математичког дела процедуре. И у оквиру ове теме др Николић је учествовао у свим фазама од формулације теме до кореспонденције са реферијима и едиторима.

Током боравка у Минхену успостављена је сарадња са групом проф. Листа (није формализована), која се огледа у честој кореспонденцији и анализи нових радова, што доприноси већем квалитету резултата.

1.8 Уводна предавања на конференцијама и друга предавања

После претходног избора у звање др Бојан Николић је одржао следећа предавања по позиву на скуповима од националног значаја: **M 61**

Б. Николић, *Гравитациони таласи - од теорије до директне детекције*, Настава физике број 3, мај 2016, 213-221, *XXXIV* Републички семинар о настави физике, Златибор 12.-14. мај 2016.

Прилог: копија рада, план рада скупа, позив организатора.

Остварени резултати након одлуке Научног већа о предлогу за стицање садашњег (пошто се ради о реизбору) научног звања

Категорија	М бодова по раду	Број радова	Укупно М бодова	Нормирани број М бодова
M21	8	5	40	40
M33	1	4	4	4
M61	1.5	1	1.5	1.5
M63	1	1	1	1

Поређење са минималним квантитативним условима за реизбор у звање виши научни сарадник [1]

		Неопходно	Остварено
Виши н. сарадник (реизбор)	Укупно	25	46.5
	$M_{10} + M_{20} + M_{31} + M_{32} + M_{33} + M_{41} + M_{42} + M_{90}$	20	44
	$M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22} + M_{23}$	15	40

[1] По Правилнику за реизбор у звање виши научни сарадник кандидат мора да оствари минималан услов-**половину** поена потребних за звање виши научни сарадник

Spisak objavljenih radova sa citatima *

July 5, 2018

Radovi u vrhunskim medjunarodnim časopisima, M21 - (8+8+8+8+8=40)

1. B. Nikolić and B. Sazdović, Gauge symmetries decrease the number of *Dp*-brane dimensions, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 045024.

2. B. Nikolić and B. Sazdović, Gauge symmetries decrease the number of *Dp*-brane dimensions. II. Inclusion of the Liouville term, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 085011.

3. B. Nikolić and B. Sazdović, Type I background fields in terms of type IIB ones, *Phys. Lett.* **B666** (2008) 400.

4. B. Nikolić, B. Sazdović, *D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach*, *Nucl. Phys.* **B 836** (2010) 100–126.

5. B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry*, *JHEP* **08** (2010) 037.

6. B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 1.

7. B. Nikolić and B. Sazdović, *Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.

8. B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

9. ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *Canonical approach to the closed string noncommutativity*, *Eur. Phys. J* **C74** (2014) 2734.

*Ovde je dat spisak svih radova. Radovi objavljeni posle pokretanja postupka za izbor u zvanje viši naučni saradnik (diferencijalni radovi) kao i novi citati su označeni zvezdicama. Zbirovi posle poena se odnose na diferencijalne radove.

10. * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *T-duality diagram for a weakly curved background*, *Eur. Phys. J* **C75** (2015) 576.

11. * B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, *Nucl. Phys.* **B917** (2017) 105-121.

12. * B. Nikolić and B. Sazdović, *T-dualization of type II superstring theory in double space*, *Eur. Phys. J.* **C77** (2017) 197.

13. * B. Nikolić and D. Obrić, *Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal background*, *Fortsch. Phys.* **66** (2018) 040009.

Rad u istaknutom medjunarodnom časopisu, M22

1. B. Nikolić and B. Sazdović, Central charge contriution to noncommutativity, *Fortschr. Phys.* **56**, 491 (2008).

Rad u medjunarodnom časopisu, M23

1. B. Nikolić and B. Sazdović, *Type I superstring theory in the form of open type IIB with appropriate choice of boundary conditions*, *IJMP* **A24** (2009) 2857.

2. B. Nikolić and B. Sazdović, *Supersymmetry of noncommutativity relations*, Rom. Journ. Phys. Vol. 57, Nos. 5-6, P. 931-937, Bucharest, 2012.

3. B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity and T-duality*, Rom. Journ. Phys. Vol. 57, Nos. 5-6, P. 816-829, Bucharest, 2012.

Saopštenje sa medjunarodnog skupa štampano u celini, M33 (1+1+1+1=4)

1. B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity in the presence of the dilaton field, Zbornik radova, Balkan Workshop 2005 (BW2005), II Southeastern European Workshop "Challenges Beyond the Standard Model", Facta Universitatis, Series: Physics, Chemistry and Technology, Vol. 4, N^o 2, (2006) 405-413, editors: G. Djordjević, Lj. Nešić i J. Wess.

2. B. Nikolić and B. Sazdović, From Neumann to Dirichlet boundary conditions, *Sixth International Conference of the Balkan Physical Union*, Istanbul, Turkey, 22.–26. august 2006.; Springer, Series: AIP Conference Proceedings, Vol.899, (2007) ISBN: 978-0-7354-0404-5 (151—152). Editors: Cetin, Serkant Ali; Hikmet, Iskender.

3. B. Nikolić and B. Sazdović, Open string boundary conditions dependence on the background fields, *4th Summer School in Modern Mathematical Physics*, Belgrade, Serbia, 3–14. September 2006, editors: B. Dragovich, Z. Rakić (SFIN, XX A1 2007) 327 — 334.

4. B. Nikolić and B. Sazdović, *Improved relations between type I and type IIB background fields*, The 5th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, Belgrade, Serbia, 6–17 July 2008, editors: B. Dragovich, Z. Rakić (SFIN, XXII A1 2009) 305 — 316.

5. B. Nikolić and B. Sazdović, *Hamiltonian Approach to Dp-brane Noncommutativity*, Spring School on Strings, Cosmology and Particles, Belgrade-Niš, 31.3.-04.04.2009., Monograph issue on "Modern Trends in Strings, Cosmology and Particles", Publications of Astronomical Observatory of Belgrade No.88, July, 2010, 61; Editors: M. Ćirković, G. Djordjević, G. Senjanović, Referees: M. Hindmarsh, Dj. Šijački, D. Stojković.

6. B. Nikolić and B. Sazdović, *T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory*, The 6th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, Belgrade, Serbia, 14–23 September 2010, editors: B. Dragovich, Z. Rakić (SFIN, XXIV A1 2011) 259 — 266.

7. ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *Complet T-dualization of a String in a Weakly Curved Background*, Springer Proc.Math.Stat. 111 (2014) 13-20, 10th International Workshop on Lie Theory and Its Applications in Physics (LT-10), 17-23 June 2013. Varna, Bulgaria.

8. ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *Weakly curved background T-duals*, 8th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, SFIN XXVIII A1 (2015) 43.

9. ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *Closed string noncomutativity in the weakly curved background*, 8th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, SFIN XXVIII A1 (2015) 51.

10. ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *T-dualization of a weakly curved background*, J.Phys.Conf.Ser. 804 (2017) no.1, 012014, 24th International Conference on Integrable Systems and Quantum Symmetries (ISQS-24), 14-18 Jun 2016. Prague, Czech Republic.

Saopštenje sa medjunarodnog skupa štampano u izvodu, M34

1. B. Nikolić and B. Sazdović, Central charge contribution to noncommutativity, *BW2007 III Southeastern European Workshop "Challenges Beyond the Standard Model"*, Kladovo, Serbia, 2–9. September 2007, editors: G. Djordjevic, M. Haack, Lj. Nesic (BW2007 Book of Abstracts, Faculty of Sciences and Mathematics, Section of Serbian Physical Society, Niš 2007) 35.

2. B. Nikolić and B. Sazdović, *Hamiltonian Approach to Dp-brane Noncommutativity*, Spring School on Strings, Cosmology and Particles, Belgrade-Niš, 31.3.-04.04.2009., Book of short contributions and extended abstracts (32-34); Editors: M. Ćirković, G. Djordjević and Lj. Nešić.

3. Lj.Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity and T-duality*, Balkan Summer Institute - BSI 2011, August 19 - September 1, 2011, Niš - Donji Milanovac, Serbia; Editors: G. djordjević, Lj. Nešić, G. Senjanović..

4. B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity in type IIB superstring theory and supersymmetry*, Balkan Summer Institute - BSI 2011, August 19 - September 1, 2011, Niš - Donji Milanovac, Serbia; Editors: G. djordjević, Lj. Nešić, G. Senjanović.

Predavanje po pozivu sa skupa nacionalnog značaja štampano u celini, M61 (1.5)

1. * B. Nikolić, *Gravitacioni talasi - od teorije do direktne detekcije*, Nastava fizike broj 3, maj 2016, 213-221, XXXIV Republički seminar o nastavi fizike, Zlatibor 12.-14. maj 2016.

Saopštenje sa skupa nacionalnog značaja štampano u celini, M63 (1)

1. B. Nikolić, i B. Sazdović, Granični uslovi za otvorenu strunu i nekomutativnost prostornih koordinata, Zbornik radova sa 11. kongresa fizičara Srbije i Crne Gore, Petrovac na moru, Srbija i Crna Gora, 3.–5. jun 2004. godine, urednici: N. Konjević, B. Vujičić i P. Miranović (2004) 5-133 — 5-136.

2. B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity in the presence of dilaton field, Zbornik radova sa naučno-stručnog skupa “Sto godina teorije relativnosti“, Banja Luka, Republika Srpska, 29.–30. septembar 2005. godine, urednici: Rajko Kuzmanović, Dragoljub Mirjanić, Branko Škundrić i Zoran Rajilić (2005) 59 — 70.

3. B. Nikolić and B. Sazdović, Contribution of dilaton field to *Dp*-brane properties, FIS2007- Fundamentalne Interakcije - Srbija 2007, septembar, 26-28 2007, Iriški venac, Novi Sad, Srbija. Journal of Research in Physics, Vol. 31, N^o 2, (2007), ISSN 1450-7404, (98-101). Editors: Ištvan Bikit, Ivan Aničin, Dragan Popović, Ilija Savić, Milutin Blagojević, Miroslav Vesković, Petar Adžić, Božidar Cekić, Krunoslav Subotić, Maja Burić.

4. * B. Nikolić, *Gravitacioni talasi - šta se to talasa?*, Zbornik radova ”100 godina Opšte teorije relativnosti” str.43, 23. jun 2015. godine, SANU, Beograd, Srbija.

Odbranjena doktorska disertacija, M71

1. B. Nikolić, Nekomutativnost i dimenzionalnost Dp-brane, Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2008, mentor: prof. dr Branislav Sazdović

Odbranjena magistarska teza, M72

1. B. Nikolić, Efekat dilatonskog polja na nekomutativnost prostorno-vremenskih koordinata, Fizički fakultet Univerziteta u Beogradu, 2006, mentor: prof. dr Branislav Sazdović

Citiranost

(1) B. Nikolić and B. Sazdović, Gauge symmetries decrease the number of *Dp*-brane dimensions, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 045024, citiran je u:

- ⋆ B. Nikolić, D. Obrić, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal backgrounds, Fortsch.Phys. 66 (2018) 040009.
- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Hamiltonian approach to Dp-brane noncommutativity, Publ.Astron.Obs.Belgrade 88 (2010) 61-69.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Closed string noncommutativity in the weakly curved background, 8th Mathematical Physics Meeting : Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics. 24-31 Aug 2014. Belgrade, Serbia.
- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia .
- ⋆ Lj. Davidović, B. Sazdović, Curved Dp-brane in curved background by canonical methods, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Canonical approach to the closed string non-commutativity, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2734.
- Lj. Davidović,B. Sazdović, *Nongeometric background arising in the solution of Neumann boundary conditions*, Eur. Phys. J. **C 72** (2012) 2199.
- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.
- Lj. Davidović,B. Sazdović, *Non-commutativity parameters depend not only on the effective coordinate but on its T-dual as well*, *JHEP* **08** (2011) 112.
- Lj. Davidović,B. Sazdović, *T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial*, arXiv:1105.2809
- B. Nikolić, B. Sazdović, *Fermionic T-duality and momenta noncommutativity*, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.
- B. Nikolić, B. Sazdović, *Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry*, *JHEP* **08** (2010) 037.

- Lj. Davidović, B. Sazdović, *Noncommutativity in weakly curved background by canonical methods*, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach*, *Nucl. Phys.* **B 836** (2010) 100–126

- D. S. Popović, B. Sazdović, *Canonical approach to noncommutative gauge theory*, *Phys.Lett.* **B683** (2010) 349-353

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Central charge contribution to noncommutativity*, *Fortschr. Phys.* **56**, 491 (2008).

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Type I background fields in terms of type IIB ones*, *Phys.Lett.* **B666** (2008) 400-403

- B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 1.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Improved relations between type I and type IIB background fields, PROCEEDINGS. Edited by B. Dragovich, Z. Rakic. Belgrade, Inst. Phys. Belgrade, 2009. 513p. (SFIN Ser. A: Conferences; A1 (2009))

- B. Nikolić and B. Sazdović, Gauge symmetries decrease the number of *Dp*-brane dimensions. II. Inclusion of the Liouville term, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 085011.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Open string boundary conditions dependence on the background fields, SFIN A1 (2007) 327-334.

(2) B. Nikolić and B. Sazdović, Gauge symmetries decrease the number of *Dp*-brane dimensions. II. Inclusion of the Liouville term, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 085011, citiran je u:

- ⋆ B. Nikolić, D. Obrić, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal backgrounds, Fortsch.Phys. 66 (2018) 040009.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Hamiltonian approach to Dp-brane noncommutativity, Publ.Astron.Obs.Belgrade 88 (2010) 61-69.

- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Closed string noncommutativity in the weakly curved background, 8th Mathematical Physics Meeting : Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics. 24-31 Aug 2014. Belgrade, Serbia.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.

- * Lj. Davidović, B. Sazdović, Curved Dp-brane in curved background by canonical methods, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.

- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Canonical approach to the closed string non-commutativity, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2734.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Non-commutativity parametrs depend not only on the effective coordinates but on its T-dual as well, *JHEP* **08** (2011) 112.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial, arxiv: 1105.2809.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry, *JHEP* **08** (2010) 037.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Noncommutativity in weakly curved background by canonical methods, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014.

- B. Nikolić and B. Sazdović, $D5$-brane type I superstring background fieldsin terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach, Nucl. Phys. **B 836** (2010) 100–126.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Improved relations between type I and type IIB background fields, PROCEEDINGS. Edited by B. Dragovich, Z. Rakic. Belgrade, Inst. Phys. Belgrade, 2009. 513p. (SFIN Ser. A: Conferences; A1 (2009))

- B. Nikolić and B. Sazdović, Central charge contribution to noncommutativity, *Fortschr. Phys.* **56**, 491 (2008).

- B. Nikolić and B. Sazdović, Type I background fields in terms of type IIB ones, *Phys. Lett.* **B 666** (2008) 400.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, *Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 1.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

- Lj. Davidović,B. Sazdović, *Nongeometric background arising in the solution of Neumann boundary conditions*, Eur. Phys. J. **C 72** (2012) 2199.

- D. S. Popović, B. Sazdović, *Canonical approach to noncommutative gauge theory*, *Phys.Lett.* **B683** (2010) 349-353.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Open string boundary conditions dependence on the background fields, SFIN A1 (2007) 327-334.

(3) B. Nikolić and B. Sazdović, Type I background fields in terms of type IIB ones, *Phys. Lett.* **B666** (2008) 400, citiran je u:

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Hamiltonian approach to Dp-brane noncommutativity, Publ.Astron.Obs.Belgrade 88 (2010) 61-69.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl.Phys. B917 (2017) 105-121.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Non-commutativity parametrs depend not only on the effective coordinates but on its T-dual as well, *JHEP* **08** (2011) 112.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry, *JHEP* **08** (2010) 037.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Noncommutativity in weakly curved background by canonical methods, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014.

- B. Nikolić and B. Sazdović, $D5$-brane type I superstring background fieldsin terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach, Nucl. Phys. **B 836** (2010) 100–126.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

- ⋆ Lj. Davidović and B. Sazdović, T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial, arxiv: 1105.2809.

- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Improved relations between type I and type IIB background fields, PROCEEDINGS. Edited by B. Dragovich, Z. Rakic. Belgrade, Inst. Phys. Belgrade, 2009. 513p. (SFIN Ser. A: Conferences; A1 (2009))

(4) B. Nikolić, B. Sazdović, *D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach*, *Nucl. Phys.* **B 836** (2010) 100–126. citiran je u:

- * B. Nikolić, D. Obrić, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal backgrounds, Fortsch.Phys. 66 (2018) 040009.
- * Lj. Davidović, Open string T-duality in a weakly curved background,Eur.Phys.J. C76 (2016) no.12, 660.
- * B. Nikolić, B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl.Phys. B917 (2017) 105-121.
- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.
- * B. Sazdović, T-duality as coordinates permutation in double space for weakly curved background, JHEP 1508 (2015) 055.
- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia
- * B. Sazdović, T-duality as permutation of coordinates in double space, Chin.Phys. C41 (2017) no.5, 053101.
- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality diagram for a weakly curved background, Eur.Phys.J. C75 (2015) no.12, 576.
- * Lj. Davidović, B. Sazdović, T-duality in a weakly curved background, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2683.
- Lj. Davidović and B. Sazdović, Non-commutativity parametrs depend not only on the effective coordinates but on its T-dual as well, *JHEP* **08** (2011) 112.
- B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.
- B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry, *JHEP* **08** (2010) 037.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Noncommutativity in weakly curved background by canonical methods, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

- Lj. Davidović, B. Sazdović, *T-duality in the weakly curved background*, arxiv:1205.1991.

- * Lj. Davidović and B. Sazdović, T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial, arxiv: 1105.2809.

(5) B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry*, *JHEP* **08** (2010) 037, citiran je u:

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl.Phys. B917 (2017) 105-121.

- * M. Dimitrijević, Bilj. Nikolić, V. Radovanović, Non(Anti)commutative Field Theories: Model Building and Renormalizability Properties, Ann.U.Craiova Phys. 21 S18-S27.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.

- Lj. Davidović and B. Sazdović, Non-commutativity parametrs depend not only on the effective coordinates but on its T-dual as well, *JHEP* **08** (2011) 112.

- B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.

- M. Dimitrijević, Biljana Nikolić and V. Radovnović, Twisted SUSY: Twisted symmetry versus renormalizability, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 065010.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

- * M. Dimitrijević, Bilj. Nikolić, V. Radovanović, Non(anti)commutative field theories: model building and renormalizability, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia

- * Lj. Davidović and B. Sazdović, T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial, arxiv: 1105.2809.

(6) B. Nikolić and B. Sazdović, *Noncommutativity in space-time extended by Liouville field, Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 1, citiran je u:

- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Closed string noncommutativity in the weakly curved background, 8th Mathematical Physics Meeting : Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics. 24-31 Aug 2014. Belgrade, Serbia.
- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality and noncommutativity in type IIB superstring theory, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Sazdović, Curved Dp-brane in curved background by canonical methods, 6th Summer School in Modern Mathematical Physics (MPHYS6) 14-23 Sep 2010. Belgrade, Serbia.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Canonical approach to the closed string non-commutativity, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2734.
- Lj. Davidović and B. Sazdović, Non-commutativity parametrs depend not only on the effective coordinates but on its T-dual as well, *JHEP* **08** (2011) 112.
- B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, *Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012.
- B. Nikolić and B. Sazdović, Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry, *JHEP* **08** (2010) 037.
- Lj. Davidović and B. Sazdović, Noncommutativity in weakly curved background by canonical methods, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014.
- B. Nikolić and B. Sazdović, $D5$-brane type I superstring background fieldsin terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach, *Nucl. Phys.* **B 836** (2010) 100–126.
- B. Nikolić and B. Sazdović, Central charge contribution to noncommutativity, *Fortschr. Phys.* **56**, 491 (2008).
- B. Nikolić and B. Sazdović, Type I background fields in terms of type IIB ones, *Phys. Lett.* **B666** (2008) 400.
- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.
- Lj. Davidović,B. Sazdović, *Nongeometric background arising in the solution of Neumann boundary conditions*, Eur. Phys. J. **C 72** (2012) 2199.

- * Lj. Davidović and B. Sazdović, T-dual-coordinate dependence makes the effective Kalb-Ramond field nontrivial, arxiv: 1105.2809.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Improved relations between type I and type IIB background fields, PROCEEDINGS. Edited by B. Dragovich, Z. Rakic. Belgrade, Inst. Phys. Belgrade, 2009. 513p. (SFIN Ser. A: Conferences; A1 (2009))

(7) B. Nikolić and B. Sazdović, *Fermionic T-duality and momenta noncommutativity, Phys. Rev.* **D 84** (2011) 065012, citiran je u:

- * Lj. Davidović, Open string T-duality in a weakly curved background,Eur.Phys.J. C76 (2016) no.12, 660.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl.Phys. B917 (2017) 105-121.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.

- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality diagram for a weakly curved background, Eur.Phys.J. C75 (2015) no.12, 576.

- Ilya Bakhmatov, Fermionic T-duality and U-duality in type IIB supergravity, arxiv:1112.1983.

- I. Bakhmatov, E. O. Colgain, H. Yavartanoo, Fermionic T-duality in the pp-wave limit, *JHEP* **10** (2011) 085.

- B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101.

- Lj. Davidović, B. Sazdović, *T-duality in the weakly curved background*, Eur.Phys.J. C74 (2014) no.1, 2683, arxiv:1205.1991.

- E. O. Colgain, *Fermionic T-duality: A snapshot review*, IJMP **A27** (2012) 1230032.

(8) B. Nikolić, B. Sazdović, *Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality*, *JHEP* **06** (2012) 101, citiran je u:

- * B. Nikolić, B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, Nucl.Phys. B917 (2017) 105-121.

- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.

- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality diagram for a weakly curved background, Eur.Phys.J. C75 (2015) no.12, 576.

- E. O. Colgain, *Fermionic T-duality: A snapshot review*, IJMP **A27** (2012) 1230032.
- E. O. Colgain, *Self-duality of the D1-D5 near-horizon*, *JHEP* **04** (2012) 047.

(9)⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *Canonical approach to the closed string noncommutativity*, *Eur. Phys. J* **C74** (2014) 2734, citiran je u:

- ⋆ Lj. Davidović, B. Sazdović, The T-dual symmetries of a bosonic string, arxiv: 1806.03138.
- ⋆ R. J. Szabo, Higher Quantum Geometry and Non-Geometric String Theory, 17th Hellenic School and Workshops on Elementary Particle Physics and Gravity (CORFU2017) 02-28 Sep 2017. Corfu, Greece.
- ⋆ B. Nikolić, D. Obrić, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal backgrounds, Fortsch.Phys. 66 (2018) 040009.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of a weakly curved background, J.Phys.Conf.Ser. 804 (2017) no.1, 012014.
- ⋆ B. Sazdović, From geometry to non-geometry via T-duality, arXiv:1606.01938.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Complete T-Dualization of a String in a Weakly Curved Background, Springer Proc.Math.Stat. 111 (2014) 13-20.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Sazdović, T-dualization in a curved background in absence of a global symmetry, JHEP 1511 (2015) 119.
- ⋆ B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.
- ⋆ I. Bakas, D. Luest, T-duality, Quotients and Currents for Non-Geometric Closed Strings, Fortsch.Phys. 63 (2015) 543-570.
- ⋆ B. Sazdović, T-duality as coordinates permutation in double space for weakly curved background, JHEP 1508 (2015) 055.
- ⋆ B. Sazdović, T-duality as permutation of coordinates in double space, Chin.Phys. C41 (2017) no.5, 053101.
- ⋆ C. D. A. Blair, E. Malek, Geometry and fluxes of SL(5) exceptional field theory, JHEP 1503 (2015) 144.
- ⋆ Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-duality diagram for a weakly curved background, Eur.Phys.J. C75 (2015) no.12, 576.

(10)* Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *T-duality diagram for a weakly curved background*, *Eur. Phys. J* **C75** (2015) 576, citiran je u:

- * Lj. Davidović, B. Sazdović, The T-dual symmetries of a bosonic string, arxiv: 1806.03138.
- * B. Nikolić, D. Obrić, Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal backgrounds, Fortsch.Phys. 66 (2018) 040009.
- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of a weakly curved background, J.Phys.Conf.Ser. 804 (2017) no.1, 012014.
- * Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Weakly curved background T-duals, 8th Mathematical Physics Meeting : Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, 24-31 Aug 2014. Belgrade, Serbia
- * B. Sazdović, From geometry to non-geometry via T-duality, arXiv:1606.01938.
- * Lj. Davidović, Open string T-duality in a weakly curved background,Eur.Phys.J. C76 (2016) no.12, 660.
- * Lj. Davidović, B. Sazdović, T-dualization in a curved background in absence of a global symmetry, JHEP 1511 (2015) 119.
- * B. Nikolić, B. Sazdović, T-dualization of type II superstring theory in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.3, 197.
- * B. Sazdović, T-duality as coordinates permutation in double space for weakly curved background, JHEP 1508 (2015) 055.
- * B. Sazdović, T-duality as permutation of coordinates in double space, Chin.Phys. C41 (2017) no.5, 053101.

(11)* B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, *Nucl. Phys.* **B917** (2017) 105-121, citiran je u:

- * B. Sazdović, Open string T-duality in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.9, 634.

(12)* B. Nikolić and B. Sazdović, *T-dualization of type II superstring theory in double space*, *Eur. Phys. J.* **C77** (2017) 197, citiran je u:

- * B. Sazdović, Open string T-duality in double space, Eur.Phys.J. C77 (2017) no.9, 634.

- * D. Florenza, H. Sati, U. Schreiber, T-Duality from super Lie n-algebra cocycles for super p-branes, arxiv: 1611.06536.

- * B. Nikolić and B. Sazdović, Fermionic T-duality in fermionic double space, *Nucl. Phys.* **B917** (2017) 105-121

- * Lj. Davidović, B. Sazdović, T-dualization in a curved background in absence of a global symmetry, JHEP 1511 (2015) 119.

(13)* B. Nikolić and D. Obrić, *Noncommutativity and nonassociativity of closed bosonic string on T-dual toroidal background*, *Fortsch. Phys.* **66** (2018) 040009, citiran je u:

- * R. J. Szabo, Higher Quantum Geometry and Non-Geometric String Theory, arxiv: 1803.08861.

Beograd, 04.jul 2018. godine

dr Bojan Nikolić

Eur. Phys. J. C (2014) 74:2734
DOI 10.1140/epjc/s10052-014-2734-5

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C

Regular Article - Theoretical Physics

Canonical approach to the closed string non-commutativity

Lj. Davidović[a], **B. Nikolić**[b], **B. Sazdović**[c]

Institute of Physics, University of Belgrade, P.O.Box 57, 11001 Belgrade, Serbia

Received: 27 November 2013 / Accepted: 20 December 2013 / Published online: 28 January 2014

Abstract We consider the closed string moving in a weakly curved background and its totally T-dualized background. Using T-duality transformation laws, we find the structure of the Poisson brackets in the T-dual space corresponding to the fundamental Poisson brackets in the original theory. From this structure we see that the commutative original theory is equivalent to the non-commutative T-dual theory, whose Poisson brackets are proportional to the background fluxes times winding and momentum numbers. The non-commutative theory of the present article is more nongeometrical than T-folds and in the case of three space-time dimensions corresponds to the nongeometric space-time with R-flux.

1 Introduction

It is well known that the open string endpoints, attached to a Dp-brane, are non-commutative [1–12]. The non-commutativity is implied by the fact that for the solution of the boundary conditions the initial coordinate is given as a linear combination of the effective coordinate and the effective momentum, which have a nonzero Poisson bracket (PB). In the constant background case, the coefficient in front of the momenta is proportional to the Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu}$, whose presence is crucial in gaining the non-commutativity.

The closed string does not have endpoints and in the flat space the boundary conditions are satisfied automatically. But, to understand the closed string non-commutativity, we are going to use a explanation similar to the open string case. We will express the closed string coordinates in terms of the coordinates and momenta of some other space. The relation between different spaces will be established using the T-duality transformations.

[a] e-mail: ljubica@ipb.ac.rs
[b] e-mail: bnikolic@ipb.ac.rs
[c] e-mail: sazdovic@ipb.ac.rs

The T-dualization along isometry directions, and the construction of T-dual theory was first realized through a Buscher procedure [13,14]. The procedure is in fact a localization of the translation invariance symmetry, in which beside the covariantization of derivatives one adds the Lagrangian multiplier term to the action, which ensures the physical equivalence of the initial and the T-dual theory.

In flat space, T-duality relates σ-derivatives of the coordinates of the original theory with the momenta of its T-dual theory, and vice versa. As the momenta of the original theory are taken to be commutative, it follows that the coordinates commute as well. So, in flat space there is no non-commutativity of the closed string T-dual coordinates. This is in agreement with the fact that T-duality is a canonical transformation in the flat space, and with the fact that PB's are invariant under such transformations.

The closed string non-commutativity was first observed in the papers [15], and investigated further in [16–20], where it was found that the commutators of the coordinates are proportional to the flux and the winding number.

Let us briefly describe the result of Ref. [16], following its notation. After T_1-dualization along the X^1 coordinate, one obtains the twisted torus with coordinates $Y^a (a = 1, 2, 3)$ and f-flux. After additional T_2-dualization along $X^2 = Y^2$ one obtains the nongeometric background with coordinates Z^a and Q-flux. Using the standard Buscher prescription one cannot perform T_3-dualization along the coordinate $X^3 = Y^3 = Z^3$ because the Kalb–Ramond field B_{ab} depends on Z^3. But it is argued in Refs. [16,21,22] that T_3-dualization leads to a nongeometric background with R-flux configuration and W^a coordinates presented in the T-duality chain,

$$H_{abc},\ X^a \xrightarrow{T_1} f^a_{bc},\ Y^a \xrightarrow{T_2} Q^{ab}_c,\ Z^a \xrightarrow{T_3} R^{abc},\ W^a. \quad (1.1)$$

In the paper [16], the non-commutativity of the nongeometric background (Z^a with Q-flux) has been obtained using its T_2-duality connection $Z^a = Z^a(Y^a)$ with the geometric background (twisted torus with Y^a and f-flux).

In our paper [23], we performed a generalized Buscher T-dualization procedure along all the coordinate directions. It corresponds to the $T = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_D$-duality relation $y_\mu = y_\mu(x^\mu)$, connecting the beginning and the end of the T-duality chain:

$$H_{\mu\nu\rho},\ x^\mu \xrightarrow{T_1} (f_1)_{\mu\nu\rho},\ x_1^\mu \xrightarrow{T_2} (f_2)_{\mu\nu\rho},\ x_2^\mu \xrightarrow{T_3} \cdots \xrightarrow{T_D} (f_D)_{\mu\nu\rho},\ x_D^\mu = y_\mu, \tag{1.2}$$

where $(f_i)_{\mu\nu\rho}$ and x_i^μ, $(i = 1, 2, \ldots, D)$ are fluxes and the coordinates of the corresponding configuration. In D-dimensional space-time it is possible to perform T-duality along any subset of coordinates. For simplicity, in the present article we will T-dualize all the directions. The general case will be published separately.

We considered the bosonic string moving in a background with constant metric $G_{\mu\nu} = \text{const}$ and the linear Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3}B_{\mu\nu\rho}x^\rho$, where the field strength of the Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu\rho}$ is infinitesimally small (for more details see the introductory part of Sect. 2). The T-dual theory obtained is of the same form as the initial theory, so that the T-dual string moves in the T-dual background, but in the doubled space given by the coordinates y_μ, $\tilde{y}_\mu$. The dual coordinates satisfy the following conditions: $\dot{y}_\mu = \tilde{y}'_\mu$, $y'_\mu = \dot{\tilde{y}}_\mu$. The improvement, in comparison to the standard Buscher procedure, is the covariantization of the coordinates x^μ. In fact, because x^μ is gauge dependent, it is replaced by the gauge invariant expression $\Delta x^\mu_{inv} = \int d\xi^\alpha D_\alpha x^\mu$. As pointed out in [21,22], the T-dual background of the present paper is of the 'new class that is even more nongeometrical than T-folds'. Unlike the T-folds, this background is not a standard manifold even locally. In our formulation, this stems from the fact that the argument of the background fields Δx^μ_{inv} is the line integral. Some authors argued that such a spaces (for $D = 3$ known as R-flux background) involve nonassociative geometries [24].

In the canonical formalism, the T-dual variables can be expressed in terms of the original ones in the simple form $y'_\mu \cong \frac{1}{\kappa}\pi_\mu - \beta^0_\mu[x]$ and ${}^\star\pi^\mu \cong \kappa x'^\mu + \kappa^2\theta_0^{\mu\nu}\beta^0_\nu[x]$. The infinitesimal expression β^0_μ is an improvement in comparison to the flat background case. Because the coordinates and momenta of the original theory do not commute, β^0_μ is the source of the closed string non-commutativity.

We will follow the main idea of Ref. [16], using the T-duality transformation laws between the T-dual backgrounds in order to study the non-commutativity of the coordinates. In the paper [16], the T_2-duality connects coordinates $Z^a = Z^a(Y^a)$ of the nongeometric background (Z^a with Q-flux) and the geometric background (twisted torus with Y^a and f-flux). We performed the T-dualization procedure along all the coordinates, and we obtained the T-duality transformation $y_\mu = y_\mu(x^\mu)$ of the locally nongeometric background (the end of the chain (1.2) with y_μ and f_D-flux) and the geometric background (torus with H-flux in the beginning of the chain (1.2)). In both approaches it was assumed that the geometric backgrounds (described by Y^a in [16] and by X^a in our paper) have the standard commutation relations. The PB between the y_μ is proportional to the flux $B_{\mu\nu\rho}$ and the winding number N^μ of the initial theory. In addition, we obtain the complete algebra of the T-dual coordinates and momenta in terms of the fluxes.

For $D = 3$, the case of the present article corresponds to T-duality, $T = T_1 \circ T_2 \circ T_3$, which connects the coordinates $W^a = W^a(X^a)$ of the nongeometric background (W^a with R-flux) and the geometric background (torus with X^a and H-flux). In comparison to Ref. [16], this procedure contains one T-dualization more, T_3-dualization along the coordinate $X^3 = Y^3 = Z^3$, which cannot be done using the standard Buscher prescription because the Kalb–Ramond field B_{ab} depends on Z^3. Thus, in terms of Ref. [16], we obtained the non-commutativity of the nongeometric background, with R-flux configuration. This background does not look like the conventional space even locally.

At the end we give three appendices. In the first one we derive in detail the expression for the dual momentum ${}^\star\pi^\mu$, while in the second one we present a list of the fluxes used in the paper. The third appendix contains the mathematical details regarding the transition from PB $\{\Delta X, \Delta Y\}$ to PB $\{X, Y\}$.

2 Bosonic string in the weakly curved background and its T-dual picture

Let us consider the closed string moving in the D-dimensional space-time, in the coordinate $x^\mu(\tau,\sigma)$, $\mu = 0, \ldots, D-1$ dependent background, described by the action

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\ \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}[x]\,\partial_- x^\nu. \tag{2.1}$$

We suppose that all the coordinates are compact, with radii R_μ. The background is defined by the space-time metric $G_{\mu\nu}$ and the antisymmetric Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu}$,

$$\Pi_{\pm\mu\nu}[x] = B_{\mu\nu}[x] \pm \frac{1}{2}G_{\mu\nu}[x]. \tag{2.2}$$

The light-cone coordinates are

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \qquad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma, \tag{2.3}$$

and the action is given in the conformal gauge (the world-sheet metric is taken to be $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$).

World-sheet conformal invariance is required as a condition of having a consistent theory on the quantum level [25–28]. This results in the following space-time equations for the background fields:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_{\nu}^{\ \rho\sigma} = 0, \quad D_\rho B^\rho_{\ \mu\nu} = 0, \tag{2.4}$$

in the lowest order in the slope parameter α' and for the constant dilaton field $\Phi = \text{const}$. Here

$$B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

is the field strength of the field $B_{\mu\nu}$, and $R_{\mu\nu}$ and D_μ are Ricci tensor and the covariant derivative with respect to the space-time metric.

We will consider a weakly curved background [11,12,16, 23,29–31] defined by

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu}[x] = \text{const}, \\ &B_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho, \\ &b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = \text{const}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Here, the constant $B_{\mu\nu\rho}$ is infinitesimally small, which, according to [15,16,18–20], means that we will assume that the D-dimensional torus is so large that for any μ, ν, ρ

$$\frac{B_{\mu\nu\rho}}{R_\mu R_\nu R_\rho} \ll 1, \tag{2.7}$$

where $R_\mu (\mu = 0, 1, \dots D-1)$ are the radii of the torus. For simplicity we will take $R_0 = R_1 = \cdots = R_{D-1}$ and rescale the background fields according to Appendix A of Ref. [16]. The background (2.6) is the solution of Eq. (2.4) in the first order in the $B_{\mu\nu\rho}$ approximation of closed string theory of Eq. (2.1).

2.1 T-dual bosonic string

The T-dualization of closed string theory in a weakly curved background was the subject of investigation in [23]. There we presented the T-dualization procedure performed along all the coordinates, in a background which depends on these coordinates. Here we will give a short overview of the most important results.

The T-dual picture of the theory is given by

$$\begin{aligned} {}^\star S[y] &= \kappa \int d^2\xi \ \partial_+ y_\mu \, {}^\star\Pi_+^{\mu\nu} [\Delta V[y]] \, \partial_- y_\nu \\ &= \frac{\kappa^2}{2} \int d^2\xi \ \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu} [\Delta V[y]] \, \partial_- y_\nu, \end{aligned} \tag{2.8}$$

with

$$\begin{aligned} &\Theta_\pm^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa} (G_E^{-1} \Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa} (G_E^{-1})^{\mu\nu}, \\ &\quad G_{E\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

The dual background fields, defined in analogy with Eq. (2.2) as ${}^\star\Pi_\pm^{\mu\nu} = {}^\star B^{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} {}^\star G^{\mu\nu}$, have the form

$$\begin{aligned} &{}^\star G^{\mu\nu}[\Delta V[y]] = (G_E^{-1})^{\mu\nu} [\Delta V[y]], \\ &\quad {}^\star B^{\mu\nu}[\Delta V[y]] = \frac{\kappa}{2} \theta^{\mu\nu} [\Delta V[y]]. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Using the terminology introduced in the open string case, they are equal to the inverse of the effective metric $G^E_{\mu\nu}$ and proportional to the non-commutativity parameter $\theta^{\mu\nu}$. Their argument is given by

$$\Delta V^\mu[y] = -\kappa \theta_0^{\mu\nu} \Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu} \Delta \tilde{y}_\nu, \tag{2.11}$$

where

$$\begin{aligned} \Delta y_\mu &= \int_P (d\tau \, \dot{y}_\mu + d\sigma \, y'_\mu) = y_\mu(\xi) - y_\mu(\xi_0), \\ \Delta \tilde{y}_\mu &= \int_P (d\tau \, y'_\mu + d\sigma \, \dot{y}_\mu), \end{aligned} \tag{2.12}$$

and

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4(bG^{-1}b)_{\mu\nu}, \quad \theta_0^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa} (g^{-1} b G^{-1})^{\mu\nu} \tag{2.13}$$

are constant finite parts of the effective metric and the non-commutativity parameter. The variable $\Delta\tilde{y}_\mu$ is path independent on the zeroth order equation of motion. T-dual theory is defined in the doubled space, defined by the two coordinates y_μ and $\tilde{y}_\mu$, related by the expressions $\dot{y}_\mu = \tilde{y}'_\mu$, $y'_\mu = \dot{\tilde{y}}_\mu$.

2.2 Transformation laws

The T-duality transformation connecting the variables of the closed string theory in the weakly curved background and its T-dualized string theory is [23]

$$\partial_\pm x^\mu \cong -\kappa \Theta_\pm^{\mu\nu} [\Delta V] \left[\partial_\pm y_\nu \pm 2\beta_\nu^\mp [V]\right], \tag{2.14}$$

with

$$\begin{aligned} &\beta_\mu^\pm [x] = \frac{1}{2} (\beta_\mu^0 \pm \beta_\mu^1) = \mp \frac{1}{2} h_{\mu\nu}[x] \, \partial_\mp x^\nu, \\ &\beta_\mu^0 [x] = h_{\mu\nu}[x] \, x'^\nu, \ \beta_\mu^1 [x] = -h_{\mu\nu}[x] \, \dot{x}^\nu. \end{aligned} \tag{2.15}$$

From Eq. (2.14) we can find the transformation law for $\dot{x}^\mu$ and x'^μ:

$$\begin{aligned} \dot{x}^\mu \cong &-\kappa \theta^{\mu\nu} [\Delta V] \, \dot{y}_\nu + (G_E^{-1})^{\mu\nu} [\Delta V] \, y'_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu} \beta_\nu^0 [V] \\ &+ \kappa \theta_0^{\mu\nu} \beta_\nu^1 [V] \end{aligned} \tag{2.16a}$$

$$\begin{aligned} x'^\mu \cong &(G_E^{-1})^{\mu\nu} [\Delta V] \, \dot{y}_\nu - \kappa \theta^{\mu\nu} [\Delta V] \, y'_\nu - \kappa \theta_0^{\mu\nu} \beta_\nu^0 [V] \\ &-(g^{-1})^{\mu\nu} \beta_\nu^1 [V]. \end{aligned} \tag{2.16b}$$

Using the expression for the canonical momentum of the original theory,

$$\pi_\mu = \frac{\delta S}{\delta \dot{x}^\mu} = \kappa \left[G_{\mu\nu} \dot{x}^\nu - 2B_{\mu\nu}[x] \, x'^\nu \right], \tag{2.17}$$

and the T-dual canonical momentum,

$$\star\pi^\mu = \frac{\delta\,\star S}{\delta \dot{y}_\mu} = \kappa (G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V[y]]\,\dot{y}_\nu$$
$$-\kappa^2\theta^{\mu\nu}[\Delta V[y]]\,y'_\nu - \kappa(g^{-1})^{\mu\nu}\beta^1_\nu[V[y]], \tag{2.18}$$

derived in Appendix A, we rewrite the above transformations in canonical form:

$$x'^\mu \cong \frac{1}{\kappa}\star\pi^\mu - \kappa\theta_0^{\mu\nu}\beta^0_\nu[V], \tag{2.19a}$$
$$\pi_\mu \cong \kappa y'_\mu + \kappa\beta^0_\mu[V], \tag{2.19b}$$

with $\beta^0_\mu[V]$ defined in Eq. (2.15). It is shown in Ref. [23] that the T-dual of the T-dual action is the original one. The corresponding T-dual transformation of the variables law is the inverse of Eq. (2.14),

$$\partial_\pm y_\mu \cong -2\Pi_{\mp\mu\nu}[\Delta x]\,\partial_\pm x^\nu \mp 2\beta^\mp_\mu[x], \tag{2.20}$$

and so the transformation laws for $\dot{y}_\mu$ and y'_μ are equal to

$$\dot{y}_\mu \cong -2B_{\mu\nu}[x]\,\dot{x}^\nu + G_{\mu\nu}x'^\nu + \beta^1_\mu[x], \tag{2.21a}$$
$$y'_\mu \cong G_{\mu\nu}\dot{x}^\nu - 2B_{\mu\nu}[x]\,x'^\nu - \beta^0_\mu[x]. \tag{2.21b}$$

Using Eqs. (2.17) and (2.18) we obtain the canonical form of the T-dual transformations,

$$y'_\mu \cong \frac{1}{\kappa}\pi_\mu - \beta^0_\mu[x], \tag{2.22a}$$
$$\star\pi^\mu \cong \kappa x'^\mu + \kappa^2\theta_0^{\mu\nu}\beta^0_\nu[x]. \tag{2.22b}$$

In the zeroth order one has $x^{(0)\mu} \cong V^\mu$, and it is easy to see that Eq. (2.22) is the inverse of Eq. (2.17).

Because the T-dual theory is defined in the doubled space, we will need the canonical expression for $\tilde{y}'_\mu = \dot{y}_\mu$. Using Eqs. (2.21a) and (2.17), we obtain

$$\tilde{y}'_\mu \cong -\frac{2}{\kappa}\left(B[\Delta x] + \frac{1}{2}h[x]\right)_{\mu\nu}(G^{-1})^{\nu\rho}\pi_\rho$$
$$+\left(G^E[\Delta x] - 2h[x]\,G^{-1}b\right)_{\mu\nu}x'^\nu. \tag{2.23}$$

3 Non-commutativity relations between canonical variables

We want to establish the relation between the Poisson structures of the original and T-dual theory. The initial theory is the geometric one, described by the canonical variables x^μ and π_μ. Thus, we choose the standard form of the PB's in the original space, which are

$$\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar\sigma)\} = \delta^\mu_\nu\delta(\sigma-\bar\sigma), \quad \{x^\mu(\sigma), x^\nu(\bar\sigma)\} = 0,$$
$$\{\pi_\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar\sigma)\} = 0. \tag{3.1}$$

The T-dual theory is the nongeometric one, defined in the doubled space, with two coordinates y_μ and $\tilde{y}_\mu$, connected by relations $\dot{y}_\mu = \tilde{y}'_\mu$, $y'_\mu = \dot{\tilde{y}}_\mu$. Using the T-duality transformation laws, we search for the corresponding Poisson structure in T-dual theory i.e. the expressions for the PB's between the T-dual string coordinates $y_\mu(\sigma)$, $\tilde{y}_\mu(\sigma)$ and momenta $\star\pi^\mu(\sigma)$. This is done considering the brackets between

$$\Delta Y_\mu(\sigma,\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta\, Y'_\mu(\eta) = Y_\mu(\sigma) - Y_\mu(\sigma_0) \tag{3.2}$$

$Y_\mu = y_\mu, \tilde{y}_\mu$ and calculating the equal time commutators. The fact that T-dual coordinates under T-duality transform to both coordinate and momentum dependent expressions enables non-commutativity. The relation of the form

$$\{X'_\mu(\sigma), Y'_\nu(\bar\sigma)\} \cong K'_{\mu\nu}(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma) + L_{\mu\nu}(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma) \tag{3.3}$$

implies the following relation (derived in Appendix C) between the coordinates

$$\{X_\mu(\tau,\sigma), Y_\nu(\tau,\bar\sigma)\}$$
$$\cong -\left[K_{\mu\nu}(\sigma) - K_{\mu\nu}(\bar\sigma) + L_{\mu\nu}(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma-\bar\sigma), \tag{3.4}$$

where $\theta(\sigma)$ is the step function defined in Eq. (8.6).

In flat space the coordinate dependent part of the Kalb–Ramond field is absent, $h_{\mu\nu} = 0$, and consequently $\beta^0_\mu = 0$. Thus, from Eqs. (2.22a) and (2.22b) follows $y'_\mu \cong \frac{1}{\kappa}\pi_\mu$ and $\star\pi^\mu \cong \kappa x'^\mu$. Therefore, the PB of the canonical variables of the T-dual theory remain the standard ones, the same as in the original theory. So, the nontrivial infinitesimal expression β^0_μ, which exists only in the coordinate dependent backgrounds, is the source of the closed string non-commutativity.

Using the transformation laws (2.22a) and (2.23), we calculate the PB's $\{y'_\mu, y'_\nu\}$, $\{y'_\mu(\sigma), \tilde{y}'_\nu(\bar\sigma)\}$ and $\{\tilde{y}'_\mu(\sigma), \tilde{y}'_\nu(\bar\sigma)\}$ and express them in the form of Eq. (3.3) with K and L equal:

1. $\{y'_\mu, y'_\nu\}$

$$K_{\mu\nu}[x] = \frac{3}{\kappa}h_{\mu\nu}[x] = \frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}x^\rho, \quad L_{\mu\nu} = 0, \tag{3.5}$$

2. $\{y'_\mu, \tilde{y}'_\nu\}$

$$K_{\mu\nu}[x,\tilde{x}] = \frac{3}{\kappa}h_{\mu\nu}[\tilde{x}] - \frac{6}{\kappa}\left[h[x]\,G^{-1}b + bG^{-1}h[x]\right]_{\mu\nu},$$
$$L_{\mu\nu}[x] = \frac{1}{\kappa}g_{\mu\nu} - \frac{6}{\kappa}\left[h[x]\,G^{-1}b + bG^{-1}h[x]\right]_{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

with

$$\tilde{x}'^\mu = \frac{1}{\kappa}(G^{-1})^{\mu\nu}\pi_\nu + 2(G^{-1}B)^\mu{}_\nu x'^\nu. \tag{3.7}$$

Using Eqs. (2.6) and (7.2), expressions (3.6) can be rewritten in terms of the fluxes:

$$K_{\mu\nu}\left[x,\tilde{x}\right] = \frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}\tilde{x}^{\rho} - \frac{3}{2\kappa}\Gamma^{E}_{\rho,\mu\nu}x^{\rho},$$
$$L_{\mu\nu}\left[x\right] = \frac{1}{\kappa}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2\kappa}\Gamma^{E}_{\rho,\mu\nu}x^{\rho}, \tag{3.8}$$

3. $\{\tilde{y}'_{\mu}, \tilde{y}'_{\nu}\}$

$$K_{\mu\nu}\left[x\right] = \frac{3}{\kappa}h_{\mu\nu}\left[x\right] + \frac{24}{\kappa}\left[bh\left[x\right]b\right]_{\mu\nu}$$
$$+\frac{6}{\kappa}\left[h\left[\tilde{x}\right]b - bh\left[\tilde{x}\right]\right]_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\nu} = 0. \tag{3.9}$$

In terms of fluxes it becomes

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{\kappa}\left[B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha}Q^{\alpha\beta}{}_{\rho}g_{\beta\nu}\right]x^{\rho}$$
$$+\left[-\frac{3}{2\kappa}\left(\Gamma^{E}_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^{E}_{\nu,\mu\rho}\right) + \frac{4}{\kappa}B_{\mu\nu\sigma}(G^{-1}b)^{\sigma}{}_{\rho}\right]\tilde{x}^{\rho}, \tag{3.10}$$

where $\Gamma^{E}_{\nu,\mu\rho}$ and $Q_{\mu\nu\rho}$ are defined in Eqs. (7.1) and (7.5).

For the above values of K and L, the relation (3.4) gives

$$\{y_{\mu}(\sigma), y_{\nu}(\bar{\sigma})\} \cong -\frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}\left[x^{\rho}(\sigma) - x^{\rho}(\bar{\sigma})\right]\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{3.11}$$
$$\{y_{\mu}(\sigma), \tilde{y}_{\nu}(\bar{\sigma})\} \cong -\left\{\frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}\left[\tilde{x}^{\rho}(\sigma) - \tilde{x}^{\rho}(\bar{\sigma})\right] - \frac{3}{2\kappa}\Gamma^{E}_{\rho,\mu\nu}\left[x^{\rho}(\sigma) - x^{\rho}(\bar{\sigma})\right] + \frac{1}{\kappa}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2\kappa}\Gamma^{E}_{\rho,\mu\nu}x^{\rho}(\bar{\sigma})\right\}\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{3.12}$$
$$\{\tilde{y}_{\mu}(\sigma), \tilde{y}_{\nu}(\bar{\sigma})\} \cong -\left\{-\frac{1}{\kappa}\left[B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha}Q^{\alpha\beta}{}_{\rho}g_{\beta\nu}\right]\left[x^{\rho}(\sigma) - x^{\rho}(\bar{\sigma})\right] + \left[-\frac{3}{2\kappa}\left(\Gamma^{E}_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^{E}_{\nu,\mu\rho}\right) + \frac{4}{\kappa}B_{\mu\nu\sigma}(G^{-1}b)^{\sigma}{}_{\rho}\right] \times\left[\tilde{x}^{\rho}(\sigma) - \tilde{x}^{\rho}(\bar{\sigma})\right]\right\}\theta(\sigma-\bar{\sigma}). \tag{3.13}$$

After two-dimensional reparametrization, the σ dependent part takes the form

$$\left[X^{\mu}(f(\sigma)) - X^{\mu}(f(\bar{\sigma}))\right]\theta\left[f(\sigma) - f(\bar{\sigma})\right],$$

where $f(\sigma)$ is a monotonically increasing function with properties $f(0) = 0$ and $f(2\pi) = 2\pi$. Therefore, the PB between different points is not reparametrization invariant. For fixed points, it can be fit to be arbitrary small, by the appropriate choice of the function $f(\sigma)$. So, only PB's at the same point are physically significant.

Taking $\sigma = \bar{\sigma}$ we find that all PB's vanish, and consequently the coordinates commute. But, taking $\sigma = \bar{\sigma} + 2\pi$ in the non-commutativity relation between the dual coordinates y's (3.11), we obtain the *closed string non-commutativity relation*

$$\{y_{\mu}(\sigma+2\pi), y_{\nu}(\sigma)\} \cong -\frac{2\pi}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}N^{\rho}. \tag{3.14}$$

Here, $N^{\mu} = \frac{1}{2\pi}\left[x^{\mu}(\sigma+2\pi) - x^{\mu}(\sigma)\right]$ is the winding number of the original coordinates. In Sec. 4, we will compare this relation with the result of Refs. [16,18–20].

Similarly, from Eqs. (3.12) and (3.13), we obtain

$$\{y_{\mu}(\sigma+2\pi), \tilde{y}_{\nu}(\sigma)\} + \{y_{\mu}(\sigma), \tilde{y}_{\nu}(\sigma+2\pi)\} \cong -\frac{4\pi}{\kappa^{2}}B_{\mu\nu\rho}p^{\rho} + \frac{\pi}{\kappa}\left(3\Gamma^{E}_{\rho,\mu\nu} - 8B_{\mu\nu\lambda}b^{\lambda}{}_{\rho}\right)N^{\rho}, \tag{3.15}$$

and

$$\{\tilde{y}_{\mu}(\sigma+2\pi), \tilde{y}_{\nu}(\sigma)\} \cong \frac{2\pi}{\kappa}\Big[-B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha}Q^{\alpha\beta}{}_{\rho}g_{\beta\nu} + 2B_{\mu\nu}{}^{\lambda}g_{\lambda\rho} + 3\left(\Gamma^{E}_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma^{E}_{\nu,\mu\lambda}\right)b^{\lambda}{}_{\rho}\Big]N^{\rho} + \frac{\pi}{\kappa^{2}}\left[3\left(\Gamma^{E}_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^{E}_{\nu,\mu\rho}\right)p^{\rho} - 8B_{\mu\nu\lambda}b^{\lambda}{}_{\rho}\right]p^{\rho}. \tag{3.16}$$

Using Eq. (3.7) and integrating from σ to $\sigma + 2\pi$ we have

$$\frac{1}{2\pi}\left[\tilde{x}^{\mu}(\sigma+2\pi) - \tilde{x}^{\mu}(\sigma)\right] = \frac{1}{\kappa}(G^{-1})^{\mu\nu}p_{\nu} + 2(G^{-1})^{\mu\rho}b_{\rho\lambda}N^{\lambda}, \tag{3.17}$$

where

$$p_{\mu} = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma}^{\sigma+2\pi} d\eta\,\pi_{\mu}(\eta). \tag{3.18}$$

To complete the algebra, using the expressions (2.22) and (2.23) and after one σ integration, we find that the algebra of y_{μ}, $\tilde{y}_{\mu}$ and ${}^{\star}\pi^{\mu}$ is of the following form:

$$\left\{y_{\mu}(\sigma), {}^{\star}\pi^{\nu}(\bar{\sigma})\right\} \cong \delta_{\mu}{}^{\nu}\delta(\sigma-\bar{\sigma}) + \kappa h_{\mu\rho}\left[x(\sigma)\right]\theta_{0}^{\rho\nu} \times \delta(\sigma-\bar{\sigma}) + \kappa h_{\mu\rho}\left[x'(\bar{\sigma})\right]\theta_{0}^{\rho\nu}\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{3.19}$$
$$\left\{\tilde{y}_{\mu}(\sigma), {}^{\star}\pi^{\nu}(\bar{\sigma})\right\} \cong \left[-2bG^{-1} - 3h\left[x(\sigma)\right]G^{-1} - 2\kappa bh\left[x(\sigma)\right]\theta_{0}\right]_{\mu}^{\ \nu}\delta(\sigma-\bar{\sigma}) - \left[3h\left[x'(\bar{\sigma})\right]G^{-1} + 2\kappa bh\left[x'(\bar{\sigma})\right]\theta_{0}\right]_{\mu}^{\ \nu}\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{3.20}$$
$$\{{}^{\star}\pi^{\mu}(\sigma), {}^{\star}\pi^{\nu}(\bar{\sigma})\} \cong 0. \tag{3.21}$$

Note that at the zeroth order one has $\{y_{\mu}(\sigma), {}^{\star}\pi^{\nu}(\bar{\sigma})\} = \delta^{\nu}_{\mu}\delta(\sigma-\bar{\sigma})$ and $\{\tilde{y}_{\mu}(\sigma), {}^{\star}\pi^{\nu}(\bar{\sigma})\} = -2b_{\mu}{}^{\nu}\delta(\sigma-\bar{\sigma})$, so both doubled space variables y_{μ} and $\tilde{y}_{\mu}$ have a nontrivial PB with ${}^{\star}\pi^{\mu}$.

4 Comparison with the previous results

Let us mention that the case considered in the present paper is different from that of Ref. [16]. In Ref. [16], the non-commutativity relations in the nongeometric background with Q-flux where established, which are given in terms of winding numbers on the twisted torus $N^3 = \frac{1}{2\pi}\left(Y^3(\sigma+2\pi) - Y^3(\sigma)\right)$. In the present article, the non-commutativity of the nongeometric background, which is not standard even locally and for $D=3$ turns to R-flux background, was obtained in terms of the winding numbers on the torus with H-flux $N^\mu = \frac{1}{2\pi}\left(X^\mu(\sigma+2\pi) - X^\mu(\sigma)\right)$.

4.1 The brief overview of the results of Ref. [16]

Before comparing the results of our paper with those of Ref. [16] let us shortly reexpress the result of Ref. [16] using its notation. From the last identification in Eq. (2.17) and the first relation in (2.25) of Ref. [16] it follows that

$$Y^1_H = Y^2_0 Y^3_0 + \cdots. \tag{4.1}$$

Using the expression for $G_{ab}(Y_3)$ for the twisted torus (Table 1) of Ref. [16] we find

$$\pi_1 = \dot{Y}^1 - HY^3_0\dot{Y}^2_0, \quad \pi_2 = \dot{Y}^2 - HY^3_0\dot{Y}^1_0, \tag{4.2}$$

and consequently

$$\pi_{01} = \dot{Y}^1_0, \quad \pi_{H2} = \dot{Y}^2_H - Y^3_0\dot{Y}^1_0 = \dot{Y}^2_H - Y^3_0\pi_{01}. \tag{4.3}$$

The T_2-duality along Y^2, from the twisted torus to the nongeometric background produces

$$\begin{aligned} Z^1 &\cong Y^1 = Y^1_0 + HY^2_0 Y^3_0, \quad Z^{2'} \cong \dot{Y}^2 - HY^3_0\dot{Y}^1_0 \\ &= \pi_2 = \pi_{02} + H\left(\dot{Y}^2_H - Y^3_0\pi_{01}\right). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Thus, we find the PB

$$\begin{aligned} &\{Z^1(\sigma), Z^{2'}(\bar\sigma)\} \cong \{Y^1(\sigma), \pi_2(\bar\sigma)\} \\ &\quad = H\left[Y^3_0(\sigma) - Y^3_0(\bar\sigma)\right]\delta_{2\pi}(\sigma-\bar\sigma). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Note that $\delta_{2\pi}(\sigma-\bar\sigma)$ is a 2π periodic δ-function, $\delta_{2\pi}(\alpha) = \sum_{n\in Z}\delta(\alpha - 2\pi n)$, so the periodic parts in the bracket in front of the δ-function disappear and we obtain

$$\{Z^1(\sigma), Z'^2(\bar\sigma)\} = HN^3(\sigma-\bar\sigma)\delta_{2\pi}(\sigma-\bar\sigma). \tag{4.6}$$

Here N^3 is the winding number of Y^3_0, which has the general form

$$Y^3_0(\sigma) = N^3\sigma + Y^3_{\text{periodic}}(\sigma). \tag{4.7}$$

The expression $\alpha\delta_{2\pi}(\alpha)$ is zero for $\alpha=0$, but it is different from zero for $\alpha = 2n\pi$ $(n\in Z, n\neq 0)$.

The integration over $\bar\sigma$, from $\bar\sigma_0$ to $\bar\sigma$, produces

$$\begin{aligned} &\{Z^1(\sigma), Z^2(\bar\sigma)\} - \{Z^1(\sigma), Z^2(\bar\sigma_0)\} \\ &\quad = -\frac{1}{2\pi}HN^3\left[F(\sigma-\bar\sigma) - F(\sigma-\bar\sigma_0)\right], \end{aligned} \tag{4.8}$$

where

$$2\pi\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\eta\,\eta\,\delta_{2\pi}(\eta) = F(\alpha) - F(\alpha_0), \tag{4.9}$$

and

$$F(\alpha) = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n^2}e^{-in\alpha} + i\alpha\sum_{n\neq 0}\frac{1}{n}e^{-in\alpha} + \frac{\alpha^2}{2}. \tag{4.10}$$

The function $F(\alpha)$ is even, $F(-\alpha) = F(\alpha)$, and $F(0) = \frac{\pi^2}{3}$.

So, the result for the PB itself,

$$\{Z^1(\sigma), Z^2(\bar\sigma)\} = -\frac{1}{2\pi}HN^3\left[F(\sigma-\bar\sigma) + C\right], \tag{4.11}$$

is in fact equation (4.41) of Ref. [16] up to some integration constant C. The undetermined constant C corresponds to the contribution of the zero modes of the undetermined commutators, because one started with the σ-derivative of the coordinate Z^2. The choice of Ref. [16] in subsection 4.4.2 is $C=0$, which produces the expression (4.41) of Ref. [16] and the non-commutativity at the same point, $\sigma = \bar\sigma$,

$$\{Z^1(\sigma), Z^2(\sigma)\} = -\frac{1}{2\pi}HN^3F(0) = -\frac{\pi}{6}HN^3. \tag{4.12}$$

As was pointed out in Ref. [16], ‘other reasonings could as well be pursued’. Following the line of our paper one may require that coordinates are commutative at the same point $(\sigma = \bar\sigma)$, which produces

$$C = -F(0) = -\frac{\pi^2}{3}. \tag{4.13}$$

Thus, with this choice one has

$$\{Z^1(\sigma), Z^2(\bar\sigma)\} = HN^3\left[F(\sigma-\bar\sigma) - \frac{\pi^2}{3}\right], \tag{4.14}$$

and one obtains the non-commutativity for $\sigma = 2\pi + \bar\sigma$,

$$\{Z^1(\sigma+2\pi), Z^2(\sigma)\} = \pi HN^3. \tag{4.15}$$

4.2 Similarities and differences

Although we analyzed the different cases, let us compare some general features of the results considered. In both approaches the commutators are infinitesimally small and they close on some winding numbers. Note that, in general, we can connect any geometric background with every nongeometric background from the chain of T-duality (1.2). Using the T-duality transformations we can calculate the non-commutativity of the coordinates of the nongeometric background in terms of the winding numbers of the geometrical background.

For arbitrary σ and $\bar\sigma$, the σ-dependence is different. In Ref. [16], up to the integration constant C, it is equal to

$$F(\sigma-\bar\sigma) + C,$$

and in the present article, up to the integration constant C_1, it is

$$\left[x^\mu(\sigma) - x^\mu(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma - \bar\sigma) + C_1.$$

The constants appear because in both approaches we started with the sigma derivatives of the coordinates. In the papers considered, the values of the constants are taken to be $C = 0$ and $C_1 = 0$. For these choices, the non-commutativity appears for $\sigma = \bar\sigma$ in Ref. [16] and for $\sigma = \bar\sigma + 2\pi$ in the present article. For the other choice, $C = -F(0) = -\frac{\pi^2}{3}$ and $C_1 = 0$, in both cases the coordinates commute at the same point $\sigma = \bar\sigma$ and have nontrivial PB for $\sigma = \bar\sigma + 2\pi$.

The main difference between the two approaches is the origin of non-commutativity. The nontrivial boundary conditions given in Eq. (2.25) of Ref. [16] are the source of the non-commutativity in that article. Because Ref. [16] does not consider T_3-dualization, the β^0_μ-functions (introduced in Eq. (2.15)) are zero and there is no non-commutativity of this kind. On the other hand, in the case considered in this paper, just these β^0_μ functions are the sources of the non-commutativity, even in the absence of the nontrivial boundary conditions of Ref. [16]. For complete non-commutativity relations one should take into account both kinds of non-commutativity.

5 Concluding remarks

In the present article we derived the closed string non-commutativity relations. We considered the theory describing a string moving in a weakly curved background. Its T-dual theory is obtained performing the T-dualization procedure along all the coordinates [23]. The T-dual transformation laws play a central role in our approach. These laws connect the world-sheet derivatives of the coordinates and momenta in the original and the T-dual theory. The zero orders are transformation laws of the constant background and they do not lead to the non-commutativity. The term β^0_μ, which is infinitesimally small and bilinear in the x^μ coordinates, plays a key role in obtaining the non-commutativity relations.

In the original space we choose the standard Poisoon brackets. The T-dual coordinates y_μ have two terms: one linear in the original momenta and the other bilinear in the original coordinates. This explains the nontrivial PB $\{y_\mu, y_\nu\}$ of Eq. (3.11), which is linear in the coordinates. Note that in the case of an open string moving in the flat background coordinate is linear function in both effective momenta and coordinates. Therefore, the corresponding PB is constant.

The T-dual momenta $^\star\pi^\mu$ are bilinear expressions in the original coordinates. Thus, the PB of the T-dual momenta vanishes, see Eq. (3.21), but the PB between the T-dual coordinates and the momenta (3.19) obtained an additional term linear in the coordinates.

In the doubled space there exists the additional coordinate $\tilde y_\mu$. It consists of a term linear in the original momenta, but with the coefficient linear in the original coordinate and the other terms bilinear in the original coordinates. Thus, it produces a nontrivial PB with all variables $(y_\mu, \tilde y_\mu, {}^\star\pi^\mu)$, see Eqs. (3.12), (3.13), and (3.20).

The general structure of the non-commutativity relations is

$$\begin{aligned}\{Y_\mu(\sigma), Y_\nu(\bar\sigma)\} &= \{F_{\mu\nu\rho}\left[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar\sigma)\right] \\ &+ \tilde F_{\mu\nu\rho}\left[\tilde x^\rho(\sigma) - \tilde x^\rho(\bar\sigma)\right]\}\theta(\sigma - \bar\sigma),\end{aligned} \tag{5.1}$$

where $Y_\mu = (y_\mu, \tilde y_\nu)$ and $F_{\mu\nu\rho}$ and $\tilde F_{\mu\nu\rho}$ are the constant and infinitesimally small fluxes. At the same points, for $\sigma = \bar\sigma$ all PB's are zero. In the important particular case for $\sigma = \bar\sigma + 2\pi$ we get

$$\begin{aligned}&\{Y_\mu(\sigma + 2\pi), Y_\nu(\sigma)\} \\ &= 2\pi\left[(F_{\mu\nu\rho} + 2\tilde F_{\mu\nu\alpha} b^\alpha_\rho)N^\rho + \frac{1}{\kappa}\tilde F_{\mu\nu}{}^\rho p_\rho\right],\end{aligned} \tag{5.2}$$

where N^μ and p_μ are the winding numbers and momenta of the original theory. We rewrite it in the form

$$\begin{aligned}&\{Y_\mu(\sigma + 2\pi), Y_\nu(\sigma)\} \\ &= \oint_{C_\rho} F_{\mu\nu\rho} \mathrm{d}x^\rho + \oint_{\tilde C_\rho} \tilde F_{\mu\nu\rho} \mathrm{d}\tilde x^\rho,\end{aligned} \tag{5.3}$$

where C_ρ and $\tilde C_\rho$ are cycles around which the closed string is wrapped. Note that the 'wrapping' of the auxiliary coordinate $\tilde x^\mu$ is in accordance with Eq. (3.17) and represents a linear combination of momenta p_μ and winding numbers N^μ. This generalizes the conjecture of Ref. [32] on the relation between the closed string non-commutativity and fluxes.

In terms of Ref. [16] for the three-dimensional torus $x^\mu \to X^a$, $(a = 1, 2, 3)$ our case corresponds to the non-commutativity of the nongeometric background with W^a coordinates and R-fluxes obtained after the successive performation of all three T-dualizations along all three coordinates. It relates the W^a with the X^a coordinates of the torus with H-flux, and so the PB closes on the winding number of the X^a-coordinates. We hope that these results will contribute to a better understanding of the strangest, uncommon R-flux configurations where the non-commutativity appears as a consequence of the nontrivial β^0_μ-functions. Note that Ref. [16] uses T_2-duality (performed along Y^2) and the relation $Z^a = Z^a(Y^a)$ to obtain the non-commutativity of the nongeometric background with Q-flux in terms of the winding of the Y^a-coordinates. There the non-commutativity originates from the nontrivial boundary conditions. To obtain the general structure of the closed string non-commutativity for arbitrary background of the chain (1.2) one should find its

T-duality transformations with all other backgrounds of the chain and calculate both kinds of non-commutativity originating from nontrivial boundary conditions as well as from nontrivial β^0_μ functions.

The term of the action with the constant part of the Kalb–Ramond field $b_{\mu\nu}$ is topological. Thus, it does not contribute to the equations of motion. In the open string case it contributes to the boundary conditions and it is a source of the open string non-commutativity. In the closed string case it is absent from boundary conditions as well. Classically, we can gauge it away and the Kalb–Ramond field becomes infinitesimally small. But if $b_{\mu\nu} = 0$ one loses topological contributions. In order to investigate the global structure of the theory with holonomies of the world-sheet gauge fields in quantum theory we should preserve such a term.

Putting $b_{\mu\nu} = 0$ the non-commutativity relations (3.14), (3.15), and (3.16) get a simpler form,

$$\{y_\mu(\sigma+2\pi), y_\nu(\sigma)\} = -\frac{2\pi}{\kappa} B_{\mu\nu\rho} N^\rho,$$
$$\{y_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} = -\frac{1}{\kappa} G_{\mu\nu} - \frac{2\pi}{\kappa^2} B_{\mu\nu}{}^\rho p_\rho,$$
$$\{\tilde{y}_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} = -\frac{6\pi}{\kappa} B_{\mu\nu\rho} N^\rho. \tag{5.4}$$

Acknowledgments Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.

Appendix A: The momentum in T-dual theory

Let us here calculate the T-dual momentum given in Eq. (2.18). The T-dual theory depends on the two variables y_μ, $\tilde{y}_\mu$, which are connected by the relations $\dot{y}_\mu = \tilde{y}'_\mu$, $y'_\mu = \dot{\tilde{y}}_\mu$. Therefore, to obtain the momentum canonically conjugated to y_μ, we should vary the action with respect to both $\dot{y}_\mu$ and $\tilde{y}'_\mu$.

First, let us calculate the contribution from the background fields argument. With the help of the relation

$$\Theta^{\mu\nu}_-[x] = \Theta^{\mu\nu}_{0-} - 2\kappa\Theta^{\mu\rho}_{0-} h_{\rho\sigma}[x]\Theta^{\sigma\nu}_{0-}, \tag{6.1}$$

we rewrite the T-dual action (2.8) as

$${}^\star S[y] = {}^\star S_0 - \kappa^3 \int d^2\xi\, \partial_+ y_\mu \Theta^{\mu\rho}_{0-} h_{\rho\sigma}[\Delta V[y]]\Theta^{\sigma\nu}_{0-}\partial_- y_\nu,$$
$${}^\star S_0 = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\, \partial_+ y_\mu \Theta^{\mu\nu}_{0-}\partial_- y_\nu. \tag{6.2}$$

Using the expression

$$\partial_\pm V^\mu = -\kappa\Theta^{\mu\nu}_{0\pm}\partial_\pm y^{(0)}_\nu, \tag{6.3}$$

we obtain

$${}^\star S[y] = {}^\star S_0 + \kappa\int d^2\xi\, \partial_+ V^\mu h_{\mu\nu}[\Delta V]\partial_- V^\nu$$
$$= {}^\star S_0 + \kappa\int d^2\xi\, \Delta V^\mu h_{\mu\nu}\left[\partial_- V\right]\partial_+ V^\nu. \tag{6.4}$$

Because of the relation

$$h_{\mu\nu}\left[\partial_- V\right]\partial_+ V^\nu = \partial_0\beta^0_\mu[V] + \partial_1\beta^1_\mu[V], \tag{6.5}$$

the action becomes

$${}^\star S[y] = {}^\star S_0 + \kappa\int d^2\xi \left[\kappa\Delta y_\mu\theta^{\mu\nu}_0 + \Delta\tilde{y}_\mu(g^{-1})^{\mu\nu}\right]$$
$$\times\left(\partial_0\beta^0_\nu[V] + \partial_1\beta^1_\nu[V]\right). \tag{6.6}$$

So, the contribution to the T-dual momentum coming from the T-dual background fields argument is obtained from Eq. (6.6), integrating over σ by parts in $\Delta\tilde{y}_\mu(g^{-1})^{\mu\nu}\partial_1\beta^1_\nu$. Using $\tilde{y}'_\mu = \dot{y}_\mu$ we obtain

$$\Delta{}^\star\pi^\mu = -\kappa(g^{-1})^{\mu\nu}\beta^1_\nu[V]. \tag{6.7}$$

Therefore, the total T-dual momentum is

$${}^\star\pi^\mu = \kappa(G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V[y]]\dot{y}_\nu$$
$$-\kappa^2\theta^{\mu\nu}[\Delta V[y]]y'_\nu - \kappa(g^{-1})^{\mu\nu}\beta^1_\nu[V[y]]. \tag{6.8}$$

Appendix B: Fluxes

The field strength of the original Kalb–Ramond field is given by Eq. (2.5). The original metric $G_{\mu\nu}$ is constant, and therefore the corresponding Christoffel connection is zero. The effective metric $G^E_{\mu\nu}$ is linear in the coordinates and the corresponding Christoffel connection,

$$\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} = \frac{1}{2}\left(\partial_\nu G^E_{\mu\rho} + \partial_\rho G^E_{\mu\nu} - \partial_\mu G^E_{\nu\rho}\right)$$
$$= -\frac{4}{3}\left(B_{\mu\sigma\nu}(G^{-1}b)^\sigma{}_\rho + B_{\mu\sigma\rho}(G^{-1}b)^\sigma{}_\nu\right), \tag{7.1}$$

is an infinitesimally small constant. It will be used in the following form:

$$\Gamma^E_{\mu,\nu\rho}x^\mu = 4\left(h[x]G^{-1}b + bG^{-1}h[x]\right)_{\nu\rho} \tag{7.2}$$

and

$$(\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^E_{\nu,\mu\rho})x^\rho = 8h_{\mu\nu}[bx]$$
$$-4\left(h[x]G^{-1}b - bG^{-1}h[x]\right)_{\mu\nu}. \tag{7.3}$$

We express the dual Kalb–Ramond field [23] as

$${}^\star B^{\mu\nu}[\Delta V] = {}^\star b^{\mu\nu} + Q^{\mu\nu}{}_\rho\Delta V^\rho, \tag{7.4}$$

where ${}^{\star}b^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\theta_0^{\mu\nu}$ and

$$Q^{\mu\nu}{}_{\rho} = -\frac{1}{3}\left[(g^{-1})^{\mu\sigma}(g^{-1})^{\nu\tau} - \kappa^2\theta_0^{\mu\sigma}\theta_0^{\nu\tau}\right]B_{\sigma\tau\rho}. \tag{7.5}$$

This will be used as

$$Q^{\mu\nu}{}_{\rho}x^{\rho} = -(g^{-1})^{\mu\rho}\left[h[x] + 4bG^{-1}h[x]G^{-1}b\right]_{\rho\sigma}(g^{-1})^{\sigma\nu} = -\left[g^{-1}h[x]g^{-1} + \kappa^2\theta_0 h[x]\theta_0\right]^{\mu\nu}. \tag{7.6}$$

Appendix C: PB's between pure coordinates

Starting with the PB of the σ derivatives of the coordinates

$$\{X'_\mu(\sigma), Y'_\nu(\bar\sigma)\} \cong K'_{\mu\nu}(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma) + L_{\mu\nu}(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma), \tag{8.1}$$

let us find the expression for the PB between the coordinates, $\{X_\mu(\sigma), Y_\nu(\bar\sigma)\}$. From Eq. (8.1) it follows that $\Delta X_\mu(\sigma,\sigma_0)$ and $\Delta Y_\mu(\sigma,\sigma_0)$ defined by

$$\Delta X_\mu(\sigma,\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta\, X'_\mu(\eta) = X_\mu(\sigma) - X_\mu(\sigma_0),$$
$$\Delta Y_\mu(\sigma,\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta\, Y'_\mu(\eta) = Y_\mu(\sigma) - Y_\mu(\sigma_0) \tag{8.2}$$

satisfy

$$\{\Delta X_\mu(\sigma,\sigma_0), \Delta Y_\nu(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\} \cong \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta \int_{\bar\sigma_0}^{\bar\sigma} d\bar\eta \left[K'_{\mu\nu}(\eta)\delta(\eta-\bar\eta) + L_{\mu\nu}(\eta)\delta'(\eta-\bar\eta)\right]. \tag{8.3}$$

Integrating over $\bar\eta$ and using

$$\int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta f(\eta)\delta(\eta-\bar\sigma) = f(\bar\sigma)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma)\right], \tag{8.4}$$

we obtain

$$\{\Delta X_\mu(\sigma,\sigma_0), \Delta Y_\nu(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\} \cong \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta \Big[K'_{\mu\nu}(\eta)\left[\theta(\eta-\bar\sigma_0) - \theta(\eta-\bar\sigma)\right] + L_{\mu\nu}(\eta)\left[\delta(\eta-\bar\sigma_0) - \delta(\eta-\bar\sigma)\right]\Big], \tag{8.5}$$

where the function $\theta(\sigma)$ is defined as

$$\theta(\sigma) \equiv \int_0^{\sigma} d\eta\delta(\eta) = \frac{1}{2\pi}\left(\sigma + 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin n\sigma\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma = 0 \\ 1/2 & \text{if } 0 < \sigma < 2\pi, \quad \sigma \in [0.2\pi]. \\ 1 & \text{if } \sigma = 2\pi \end{cases} \tag{8.6}$$

Integrating by parts over η and using Eq. (8.4) we get

$$\begin{aligned}\{\Delta X_\mu(\sigma,\sigma_0), \Delta Y_\nu(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\} \cong\; & K_{\mu\nu}(\sigma)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma_0) - \theta(\sigma-\bar\sigma)\right] \\ & - K_{\mu\nu}(\sigma_0)\left[\theta(\sigma_0-\bar\sigma_0) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma)\right] \\ & - K_{\mu\nu}(\bar\sigma_0)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma_0) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma_0)\right] \\ & + K_{\mu\nu}(\bar\sigma)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma)\right] \\ & + L_{\mu\nu}(\bar\sigma_0)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma_0) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma_0)\right] \\ & - L_{\mu\nu}(\bar\sigma)\left[\theta(\sigma-\bar\sigma) - \theta(\sigma_0-\bar\sigma)\right].\end{aligned} \tag{8.7}$$

The relation

$$\{X_\mu(\tau,\sigma), Y_\nu(\tau,\bar\sigma)\} \cong -\left[K_{\mu\nu}(\sigma) - K_{\mu\nu}(\bar\sigma) + L_{\mu\nu}(\bar\sigma)\right] \times\theta(\sigma-\bar\sigma) \tag{8.8}$$

solves Eq. (8.7), up to additive constant.

For $X_\mu = Y_\mu$, the antisymmetry of the left hand side under the replacement $\mu \leftrightarrow \nu$ and $\sigma \leftrightarrow \bar\sigma$ produces the conditions $L_{\mu\nu} = L_{\nu\mu}$ and $K_{\mu\nu} + K_{\nu\mu} = L_{\mu\nu}$.

References

1. F. Ardalan, H. Arfaei, M.M. Sheikh-Jabbari, JHEP **02**, 016 (1999)
2. C.S. Chu, P.M. Ho, Nucl. Phys. B **550**, 151 (1999)
3. N. Seiberg, E. Witten, JHEP **09**, 032 (1999)
4. F. Ardalan, H. Arfaei, M.M. Sheikh-Jabbari, Nucl. Phys. B **576**, 578 (2000)
5. C.S. Chu, P.M. Ho, Nucl. Phys. B **568**, 447 (2000)
6. T. Lee, Phys. Rev. D **62**, 024022 (2000)
7. B. Sazdović, Eur. Phys. J. C **44**, 599 (2005)
8. B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Rev. D **74**, 045024 (2006)
9. B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Rev. D **75**, 085011 (2007)
10. B. Nikolić, B. Sazdović, Adv. Theor. Math. Phys. **14**, 1 (2010)
11. Lj. Davidović, B. Sazdović, Phys. Rev. D **83**, 066014 (2011)
12. Lj. Davidović, B. Sazdović, JHEP **08**, 112 (2011)
13. T.H. Buscher, Phys. Lett. B **194**, 59 (1987)
14. T.H. Buscher, Phys. Lett. B **201**, 466 (1988)
15. D. Luest, JHEP **12**, 084 (2010)
16. D. Andriot, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, JHEP **06**, 021 (2013)
17. D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, Phys. Rev. Lett. **108**, 261602 (2012)
18. D. Luest, arxiv:1205.0100 [hep-th]
19. R. Blumenhagen, A. Deser, D. Luest, E. Plauschinn, F. Rennecke, J. Phys. A **44**, 385401 (2011)
20. C. Condeescu, I. Florakis, D. Luest, JHEP **04**, 121 (2012)
21. J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, JHEP **10**, 085 (2005)
22. A. Dabholkar, C. Hull, JHEP **05**, 009 (2006)
23. Lj. Davidović, B. Sazdović, Eur. Phys. J. C **74** (1), (2014)

24. R. Blumenhagen, E. Plauschinn, J. Phys. A Math. Theor. **44**, 015401 (2011)
25. E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B **158**, 316 (1985)
26. E.S. Fradkin, A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **261**, 1 (1985)
27. K. Becker, M. Becker, J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2006)
28. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. (Cambridge University Press, Cambridge, 2004)
29. V. Schomerus, Class. Quant. Grav. **19**, 5781 (2002)
30. L. Cornalba, R. Schiappa, Commun. Math. Phys. **225**, 33 (2002)
31. Lj. Davidović, B. Sazdović, EPJ C **72** (11), 2199 (2012)
32. D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Luest,, P. Patalong, Fort. Phys. **60** (2012)

Eur. Phys. J. C (2015) 75:576
DOI 10.1140/epjc/s10052-015-3808-8

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C

CrossMark

Regular Article - Theoretical Physics

T-duality diagram for a weakly curved background

Ljubica Davidović[a], **Bojan Nikolić**[b], **Branislav Sazdović**[c]

Institute of Physics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia

Received: 18 June 2014 / Accepted: 23 November 2015 / Published online: 7 December 2015

Abstract In one of our previous papers we generalized the Buscher T-dualization procedure. Here we will investigate the application of this procedure to the theory of a bosonic string moving in the weakly curved background. We obtain the complete T-dualization diagram, connecting the theories which are the result of the T-dualizations over all possible choices of the coordinates. We distinguish three forms of the T-dual theories: the initial theory, the theory obtained T-dualizing some of the coordinates of the initial theory and the theory obtained T-dualizing all of the initial coordinates. While the initial theory is geometric, all the other theories are non-geometric and additionally non-local. We find the T-dual coordinate transformation laws connecting these theories and show that the set of all T-dualizations forms an Abelian group.

1 Introduction

T-duality is a property of string theory that was not encountered in any point particle theory [1–4]. Its discovery was surprising, because it implies that there exist theories, defined for essentially different geometries of the compactified dimensions, which are physically equivalent. The origin of T-duality is seen in the possibility that, unlike a point particle, the string can wrap around compactified dimensions. But, no matter if one dimension is compactified on a circle of radius R or rather on a circle of radius l_s^2/R, where l_s is the fundamental string length scale, the theory will describe the string with the same physical properties. The investigation of T-duality does not cease to provide interesting new physical implications.

The prescription for obtaining the equivalent T-dual theories is given by the Buscher T-dualization procedure [5,6]. The procedure is applicable along the isometry directions, which allows the investigation of the backgrounds which do not depend on some coordinates. It is found that T-duality transforms geometric backgrounds to the non-geometric backgrounds with Q flux which are locally well defined, and these to different types of non-geometric backgrounds, backgrounds with R flux which are not well defined even locally [7,8]. A similar prescription can be used to obtain fermionic T-duality [9,10]. It is argued that the better understanding of T-duality should be sought for by doubling the coordinates, investigating the theories in which the background fields depend on both the usual space-time coordinates and their doubles [11–14], which would make the T-duality a manifest symmetry.

T-duality enables the investigation of the closed string non-commutativity. The coordinates of the closed string are commutative when the string moves in a constant background. In a 3-dimensional space with the Kalb–Ramond field depending on one of the coordinates, successive T-dualizations along isometry directions lead to a theory with Q flux and the non-commutative coordinates [15–17]. The novelty in the research is the generalized T-dualization procedure, realized in [18], addressing the bosonic string moving in the weakly curved background–constant gravitational field and coordinate dependent Kalb–Ramond field with an infinitesimal field strength. The non-commutativity characteristics of a closed string moving in the weakly curved background was considered in [19].

The generalized procedure is applicable to all the space-time coordinates on which the string backgrounds depend. In Ref. [18], it was first applied to all initial coordinates, which produces a T-dual theory; it was then applied to all the T-dual coordinates and the initial theory was obtained. In this paper, we will investigate the application of the generalized T-dualization procedure to an arbitrary set of coordinates. Let us denote the T-dualization along the direction x^μ by T^μ and

Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.

[a] e-mail: ljubica@ipb.ac.rs
[b] e-mail: bnikolic@ipb.ac.rs
[c] e-mail: sazdovic@ipb.ac.rs

the T-dualization along dual direction y_μ by T_μ. Choosing d arbitrary directions, we denote

$$\mathcal{T}^a = \circ_{n=1}^{d} T^{\mu_n}, \quad \mathcal{T}^i = \circ_{n=d+1}^{D} T^{\mu_n}, \quad \mathcal{T} = \circ_{n=1}^{D} T^{\mu_n}, \tag{1}$$

$$\mathcal{T}_a = \circ_{n=1}^{d} T_{\mu_n}, \quad \mathcal{T}_i = \circ_{n=d+1}^{D} T_{\mu_n}, \quad \widetilde{\mathcal{T}} = \circ_{n=1}^{D} T_{\mu_n}, \tag{2}$$

where $\mu_n \in (0, 1, \ldots, D-1)$, and $\circ$ denotes the composition of T-dualizations. We will apply T-dualizations (1) to the initial theory, and T-dualizations (2) to its completely T-dual theory (obtained in [18]). We will prove the following composition laws:

$$\mathcal{T}^i \circ \mathcal{T}^a = \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}_i \circ \mathcal{T}_a = \widetilde{\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}^a = 1, \tag{3}$$

where 1 denotes the identical transformation (T-dualization not performed). Therefore, the elements 1, $\mathcal{T}^a$ and $\mathcal{T}_a$, with $d = 1, \ldots, D$, form an Abelian group. We will find the explicit form of the resulting theories and the corresponding T-dual coordinate transformation laws. These results complete the T-dualization diagram connecting all the theories T-dual to the initial theory.

Throughout the whole article (except for Sect. 9) we assume that the Kalb–Ramond field depends on all coordinates. In that case all T-dual theories, except the initial theory, are non-geometric and non-local because they depend on the variable V^μ, which is a line integral of the derivatives of the dual coordinates. To all of these theories there corresponds a flux which is of the same type as the R flux unlike the non-geometric theories with Q flux, which have a local geometric description.

In Sects. 9.1 and 9.2, we present an example of the 3-dimensional torus, T^3 with H-flux, where Kalb–Ramond field depends only on coordinate x^3. Then T-dualizations along the isometry directions x^1 and x^2 lead to geometric background and the T-dualization along x^3 leads to non-geometric background. In Sect. 9.1 putting $D = 3$, $d = 1, 2$ with $B_{\mu\nu}$ depending on x^3 we reproduce the T-duality chain of Refs. [15–17].

In Sect. 9.2 we will compare the results of our paper with those of Ref. [8]. In our manuscript, the background fields' argument, the variable V^μ, incorporates all features of the non-geometric spaces. First, as pointed out in Ref. [8] it "eludes a geometric description even locally" because it is a line integral of the derivative. Second, we obtain non-associativity and breaking of Jacobi identity typical for the so called R-flux backgrounds. In Sect. 9.3 we present example of the 4-dimensional torus T^4 to generalize the case of Ref. [20] to critical surface.

The generalized T-dualization procedure originates from the Buscher T-dualization procedure. The first rule in the prescription is to replace the derivatives with the covariant derivatives. The new point in the prescription is the replacement of the coordinates in the background fields' argument with the invariant coordinates. The invariant coordinates are defined as the line integrals of the covariant derivatives of the original coordinates. Both covariant derivatives and invariant coordinates are defined using the gauge fields. These fields should be nonphysical, so one requires that their field strength should be zero. This is realized by adding the corresponding Lagrange multipliers' terms. As a consequence of the translational symmetry one can fix the coordinates along which the T-dualization is performed and obtain a gauge fixed action. An important cross-way in the T-dualization procedure is determined by the equations of motion of the gauge fixed action. Two equations of motion obtained varying this action are used to direct the procedure either back to the initial action or forward to the T-dual action. For the equation of motion obtained varying the action over the Lagrange multipliers, the gauge fixed action reduces to the initial action. For the equation of motion obtained varying the action over the gauge fields one obtains the T-dual theory. Comparing the solutions for the gauge fields in these two directions, one obtains the T-dual coordinate transformation laws.

2 T-duality in the weakly curved background

Let us consider the closed bosonic string propagating in the background with metric field $G_{\mu\nu}$, Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu}$ and a dilaton field Φ, described by the action [3,4]

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-g}\Big[\Big(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) + \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} B_{\mu\nu}(x)\Big) \times \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + \frac{1}{4\pi\kappa}\Phi(x) R^{(2)}\Big]. \tag{4}$$

The integration goes over a 2-dimensional world-sheet Σ parametrized by ξ^α ($\xi^0 = \tau$, $\xi^1 = \sigma$), $g_{\alpha\beta}$ is the intrinsic world-sheet metric, $R^{(2)}$ corresponding 2-dimensional scalar curvature, $x^\mu(\xi)$, $\mu = 0, 1, \ldots, D-1$ are the coordinates of the D-dimensional space-time, $\kappa = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ with α' being the Regge slope parameter and $\varepsilon^{01} = -1$.

2.1 Weakly curved background

The requirement of the quantum conformal invariance of the world-sheet results in the space-time equations of motion for the background fields. In the lowest order in the slope parameter α' these equations are

$$\begin{aligned} &R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_\nu^{\ \rho\sigma} + 2D_\mu \partial_\nu \Phi = 0,\\ &D_\rho B^\rho_{\ \mu\nu} - 2\partial_\rho \Phi B^\rho_{\ \mu\nu} = 0,\\ &4(\partial\Phi)^2 - 4D_\mu \partial^\mu \Phi + \frac{1}{12} B_{\mu\nu\rho} B^{\mu\nu\rho}\\ &\quad +4\pi\kappa(D-26)/3 - R = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Here $B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ is the field strength of the field $B_{\mu\nu}$, and $R_{\mu\nu}$ and D_μ are the Ricci tensor and the covariant derivative with respect to the space-time metric. We will consider one of the simplest coordinate dependent solutions of (5), the weakly curved background. This background was considered in Refs. [21–23], where the influence of the boundary conditions on the non-commutativity of the open bosonic string has been investigated. The same approximation was considered in [16,19] in context of the closed string non-commutativity.

The weakly curved background is defined by

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}(x) &= \text{const}, \\ B_{\mu\nu}(x) &= b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho \equiv b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \\ \Phi(x) &= \text{const}, \end{aligned} \tag{6}$$

with $b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = \text{const}$. This background is the solution of the space-time equations of motion if the constant $B_{\mu\nu\rho}$ is taken to be infinitesimal and all the calculations are done in the first order in $B_{\mu\nu\rho}$, so that the curvature $R_{\mu\nu}$ can be neglected as the infinitesimal of the second order. Through the whole manuscript (with the exception of Sect. 9) we assume that the background has the topology of D-dimensional torus T^D, where the Kalb–Ramond field depends on all coordinates. In Sects. 9.1 and 9.2 we give an example of the 3-dimensional torus, T^3, with H-flux, where the Kalb–Ramond field depends only on the coordinate x^3, while in Sect. 9.3 we give an example of the 4-dimensional torus T^4 with constant background fields.

The assumption that $B_{\mu\nu\rho}$ is infinitesimal means that we consider the D-dimensional torus so large that for any choice of indices

$$\frac{B_{\mu\nu\rho}}{R_\mu R_\nu R_\rho} \ll 1 \tag{7}$$

holds [16], where R_μ are the radii of the torus. The H-flux background, considered in Refs. [8,16], is of the same type as the weakly curved background. However, this background depends just on x^3 and corresponds to the examples addressed in Sect. 9 of our paper. The background considered in the rest of the article depends on all coordinates.

In this paper we will investigate the T-dualization properties of the action (4) describing the closed string moving in the weakly curved background. Taking the conformal gauge $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$, the action (4) becomes

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\ \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(x) \partial_- x^\nu, \tag{8}$$

with the background field composition equal to

$$\Pi_{\pm\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}(x), \tag{9}$$

and the light-cone coordinates given by

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \qquad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma. \tag{10}$$

2.2 Complete T-dualization

The T-dualization of the closed string theory in the weakly curved background was presented in [18]. The procedure is related to a global symmetry of the theory

$$\delta x^\mu = \lambda^\mu. \tag{11}$$

The symmetry still exists in the presence of the nontrivial Kalb–Ramond field (6), but only in the case of the trivial mapping of the world-sheet into the space-time, because in that case the variation of the action (8)

$$\delta S = \frac{\kappa}{3} \varepsilon^{\alpha\beta} B_{\mu\nu\rho} \lambda^\rho \int d^2\xi\, \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu \tag{12}$$

after partial integration, using the identity $\varepsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha\partial_\beta = 0$, becomes

$$\delta S = \frac{\kappa}{3} B_{\mu\nu\rho} \lambda^\rho \epsilon^{\alpha\beta} \int d^2\xi\, \partial_\alpha (x^\mu \partial_\beta x^\nu), \tag{13}$$

which is equal to zero. This means that classically, directions which appear in the argument of Kalb–Ramond field are also Killing directions. However, the standard Buscher procedure cannot be applied to them, because background fields depend on the coordinates but not on their derivatives.

The T-dual picture of the theory, obtained on applying the T-dualization procedure to all the coordinates, is given by

$$\begin{aligned} S[y] &= \kappa \int d^2\xi\ \partial_+ y_\mu\, {}^\star\Pi_+^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big)\, \partial_- y_\nu \\ &= \frac{\kappa^2}{2} \int d^2\xi\ \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big) \partial_- y_\nu, \end{aligned} \tag{14}$$

where

$$\Theta_\pm^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}\Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}, \tag{15}$$

with

$$\begin{aligned} G_{E\mu\nu} &\equiv G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}, \\ \theta^{\mu\nu} &\equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1} B G^{-1})^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{16}$$

being the effective metric and the non-commutativity parameter in Seiberg–Witten terminology of the open bosonic string theory [24]. The T-dual background fields are equal to

$$\begin{aligned} {}^\star G^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big) &= (G_E^{-1})^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big), \\ {}^\star B^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big) &= \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big), \end{aligned} \tag{17}$$

and their argument is given by

$$\Delta V^\mu(y) = -\frac{\kappa}{2}\left(\Theta_{0-}^{\mu\nu} + \Theta_{0+}^{\mu\nu}\right)\Delta y_\nu + \frac{\kappa}{2}\left(\Theta_{0-}^{\mu\nu} - \Theta_{0+}^{\mu\nu}\right)\Delta\tilde{y}_\nu = -\kappa\theta_0^{\mu\nu}\Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_\nu. \tag{18}$$

Here $\Theta_{0\pm}^{\mu\nu}$ is the zeroth order value of the field composition $\Theta_\pm^{\mu\nu}$ defined in (15) and $g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4b_{\mu\nu}^2$ and $\theta_0^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(g^{-1}bG^{-1})^{\mu\nu}$ are the zeroth order values of the effective fields (16). The variable $\Delta\tilde{y}_\mu$ is the double of the dual variable $\Delta y_\mu = y_\mu(\xi) - y_\mu(\xi_0)$, defined as the following line integral:

$$\Delta\tilde{y}_\mu = \int_P (d\tau y'_\mu + d\sigma\dot{y}_\mu) = \int_P d\xi^\alpha \varepsilon^\beta{}_\alpha \partial_\beta y_\mu, \tag{19}$$

taken along the path P, from the point $\xi_0^\alpha(\tau_0, \sigma_0)$ to the point $\xi^\alpha(\tau, \sigma)$.

The fact that we are working with the weakly curved background ensures that the T-dual background fields are the solution of the space-time equations (5). Because both dual metric ${}^\star G^{\mu\nu}$ and dual Kalb–Ramond field ${}^\star B^{\mu\nu}$ are linear in coordinates with infinitesimal coefficients, the dual Christoffel symbol ${}^\star\Gamma_\mu^{\nu\rho}$ and dual field strength ${}^\star B^{\mu\nu\rho}$ are constant and infinitesimal. In Eq. (114) of Sect. 8 we will show that T-dual dilaton field is ${}^\bullet\Phi = \Phi - \ln\det\sqrt{2\Pi_+}$, where Φ is constant and Π_+ is linear in coordinates with infinitesimal coefficients. So, ${}^\bullet\Phi$ is also linear in coordinates with infinitesimal coefficients, and $\partial_\mu{}^\bullet\Phi$ is constant and infinitesimal. Consequently, $D_\mu\partial_\nu{}^\bullet\Phi$, $\partial_\rho{}^\bullet\Phi B^\rho{}_{\mu\nu}$ and $(\partial_\mu{}^\bullet\Phi)^2$ are infinitesimals of the second order. So, all T-dual space-time equations, for the metric, for the Kalb–Ramond field and for dilaton field, are infinitesimals of the second order and as such are neglected.

The initial theory (8) and its completely T-dual theory (14) are connected by the T-dual coordinate transformation laws (eq. (42) of Ref. [18])

$$\partial_\pm x^\mu = -\kappa\Theta^{\mu\nu}(\Delta V)\partial_\pm y_\nu \mp 2\kappa\Theta_{0\pm}^{\mu\nu}\beta_\nu^\mp(V), \tag{20}$$

and its inverse (eq. (66) of Ref. [18])

$$\partial_\pm y_\mu \cong -2\Pi_{\mp\mu\nu}(\Delta x)\partial_\pm x^\nu \mp 2\beta_\mu^\mp(x), \tag{21}$$

where $\beta_\mu^\pm(x) = \mp\frac{1}{2}h_{\mu\nu}(x)\partial_\mp x^\nu$. It is shown that

$$\mathcal{T}: S[x^\mu] \to S[y_\mu], \quad \widetilde{\mathcal{T}}: S[y_\mu] \to S[x^\mu], \tag{22}$$

and therefore

$$\mathcal{T}\circ\widetilde{\mathcal{T}} = 1. \tag{23}$$

3 T-dualization along arbitrary subset of coordinates $\mathcal{T}^a : S[x^\mu] \to S[x^i, y_a]$

In this section, we will learn what theory is obtained if one chooses to apply the T-dualization procedure to the action (8), along arbitrary d coordinates x^a, $\mathcal{T}^a : S[x^\mu] \to S[x^i, y_a]$, with $\mathcal{T}^a = \circ_{n=1}^d T^{\mu_n}$, $\mu_n \in (0, 1, \ldots, D-1)$.

The closed string action in the weakly curved background (6) has a global symmetry (11). One localizes the symmetry for the coordinates x^a, by introducing the gauge fields v_α^a and substituting the ordinary derivatives with the covariant derivatives

$$\partial_\alpha x^a \to D_\alpha x^a = \partial_\alpha x^a + v_\alpha^a. \tag{24}$$

The covariant derivatives are invariant under standard gauge transformations

$$\delta v_\alpha^a = -\partial_\alpha\lambda^a. \tag{25}$$

In the case of the weakly curved background, in order to obtain the gauge invariant action one should additionally substitute the coordinates x^a in the argument of the background fields with their invariant extension, defined by

$$\Delta x_{\text{inv}}^a \equiv \int_P d\xi^\alpha D_\alpha x^a = \int_P (d\xi^+ D_+x^a + d\xi^- D_-x^a) = x^a - x^a(\xi_0) + \Delta V^a, \tag{26}$$

where

$$\Delta V^a \equiv \int_P d\xi^\alpha v_\alpha^a = \int_P (d\xi^+ v_+^a + d\xi^- v_-^a). \tag{27}$$

To preserve the physical equivalence between the gauged and the original theory, one introduces the Lagrange multipliers y_a and adds term $\frac{1}{2}y_a F_{+-}^a$ to the Lagrangian, which will force the field strength $F_{+-}^a \equiv \partial_+ v_-^a - \partial_- v_+^a = -2F_{01}^a$ to vanish. In this way, the gauge invariant action

$$\begin{aligned} S_{\text{inv}}[x^\mu, x_{\text{inv}}^a, y_a] &= \kappa\int d^2\xi\Big[\partial_+x^i\Pi_{+ij}\left(x^i, \Delta x_{\text{inv}}^a\right)\partial_-x^j \\ &+ \partial_+x^i\Pi_{+ia}\left(x^i, \Delta x_{\text{inv}}^a\right)D_-x^a \\ &+ D_+x^a\Pi_{+ai}\left(x^i, \Delta x_{\text{inv}}^a\right)\partial_-x^i \\ &+ D_+x^a\Pi_{+ab}\left(x^i, \Delta x_{\text{inv}}^a\right)D_-x^b \\ &+ \frac{1}{2}(v_+^a\partial_-y_a - v_-^a\partial_+y_a)\Big] \end{aligned} \tag{28}$$

is obtained, where the last term is equal to $\frac{1}{2}y_aF_{+-}^a$ up to the total divergence. Now, we can fix the gauge taking $x^a(\xi) = x^a(\xi_0)$ and obtain the gauge fixed action

$S_{\text{fix}}[x^i, v_\pm^a, y_a]$

$$= \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \Pi_{+ij}\big(x^i, \Delta V^a\big)\partial_- x^j + \partial_+ x^i \Pi_{+ia}\big(x^i, \Delta V^a\big) v_-^a + v_+^a \Pi_{+ai}\big(x^i, \Delta V^a\big)\partial_- x^i + v_+^a \Pi_{+ab}\big(x^i, \Delta V^a\big) v_-^b + \frac{1}{2}(v_+^a \partial_- y_a - v_-^a \partial_+ y_a)\Big]. \tag{29}$$

This action reduces to the initial one for the equations of motion obtained varying over the Lagrange multipliers. The T-dual action is obtained for the equations of motion for the gauge fields.

3.1 Regaining the initial action

Varying the gauge fixed action (29) over the Lagrange multipliers y_a one obtains the equations of motion

$$\partial_+ v_-^a - \partial_- v_+^a = 0, \tag{30}$$

which have the solution

$$v_\pm^a = \partial_\pm x^a. \tag{31}$$

On this solution the background fields' argument ΔV^a defined in (27) is path independent and reduces to

$$\Delta V^a(\xi) = x^a(\xi) - x^a(\xi_0). \tag{32}$$

The gauge fixed action (29) reduces to the initial action (8), but the background fields' argument is ΔV^a instead of x^i. However, the action (8) is invariant under the constant shift of coordinates, so shifting coordinates by $x^a(\xi_0)$ one obtains the exact form of the initial action.

3.2 The T-dual action

Using the equations of motion for the gauge fields, we eliminate them and obtain the T-dual action.

The equations of motion obtained varying the gauge fixed action (29) over the gauge fields $v_\pm^a$ are

$$\Pi_{\pm ai}\big(x^i, \Delta V^a\big)\partial_\mp x^i + \Pi_{\pm ab}\big(x^i, \Delta V^a\big) v_\mp^b + \frac{1}{2}\partial_\mp y_a = \pm \beta_a^\pm\big(x^i, V^a\big), \tag{33}$$

where

$$\beta_a^\pm\big(x^i, V^a\big) = \mp\frac{1}{2}\Big[h_{ai}(x^i)\partial_\mp x^i + h_{ab}(x^i)\partial_\mp V^b + h_{ai}\big(V^a\big)\partial_\mp x^i + h_{ab}\big(V^a\big)\partial_\mp V^b\Big] \tag{34}$$

is the contribution from the background fields' argument ΔV^a, defined in a same way as in Ref. [18], by $\delta_V S_{\text{fix}} = -\kappa \int d^2\xi(\beta_a^+ \delta v_+^a + \beta_a^- \delta v_-^a)$. If the initial background $\Pi_{+\mu\nu}$ does not depend on the coordinates x^a, the corresponding beta functions are zero $\beta_a^\pm = 0$.

Multiplying Eq. (33) by $2\kappa\tilde\Theta_\mp^{ab}$, defined in (A.7), the inverse of the background fields composition $\Pi_{\pm ab}$, one obtains

$$v_\mp^a = -2\kappa\tilde\Theta_\mp^{ab}\big(x^i, \Delta V^a\big)\Big[\Pi_{\pm bi}\big(x^i, \Delta V^a\big)\partial_\mp x^i + \frac{1}{2}\partial_\mp y_b \mp \beta_b^\pm\big(x^i, V^a\big)\Big]. \tag{35}$$

Substituting (35) into the action (29), we obtain the T-dual action

$$\begin{aligned} S[x^i, y_a] &= \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \overline{\Pi}_{+ij}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_- x^j \\ &\quad - \kappa\, \partial_+ x^i \Pi_{+ia}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big) \\ &\quad \times \tilde\Theta_-^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_- y_b \\ &\quad + \kappa\, \partial_+ y_a \tilde\Theta_-^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big) \\ &\quad \times \Pi_{+bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_- x^i \\ &\quad + \frac{\kappa}{2}\, \partial_+ y_a \tilde\Theta_-^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_- y_b\Big], \end{aligned} \tag{36}$$

where

$$\overline{\Pi}_{+ij} \equiv \Pi_{+ij} - 2\kappa \Pi_{+ia}\tilde\Theta_-^{ab}\Pi_{+bj}. \tag{37}$$

In order to find the explicit value of the background fields argument $\Delta V^a(x^i, y_a)$, it is enough to consider the zeroth order of the equations of motion for the gauge fields $v_\pm^a$ (35)

$$v_\pm^{(0)a} = -2\kappa\tilde\Theta_{0\pm}^{ab}\Big[\Pi_{0\mp bi}\partial_\pm x^{(0)i} + \frac{1}{2}\partial_\pm y_b^{(0)}\Big]. \tag{38}$$

Here $\tilde\Theta_{0\pm}^{ab}$ and $\Pi_{0\mp bi}$ stand for the zeroth order values of $\tilde\Theta_\pm^{ab}$ and $\Pi_{\mp bi}$, and they are defined in (A.11).

Substituting (38) into (27) we obtain

$$\begin{aligned} \Delta V^{(0)a}(x^i, y_a) &= -\kappa\Big[\tilde\Theta_{0+}^{ab}\Pi_{0-bi} + \tilde\Theta_{0-}^{ab}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta x^{(0)i} \\ &\quad -\kappa\Big[\tilde\Theta_{0+}^{ab}\Pi_{0-bi} - \tilde\Theta_{0-}^{ab}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta\tilde x^{(0)i} \\ &\quad -\frac{\kappa}{2}\Big[\tilde\Theta_{0+}^{ab} + \tilde\Theta_{0-}^{ab}\Big]\Delta y_b^{(0)} - \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde\Theta_{0+}^{ab} - \tilde\Theta_{0-}^{ab}\Big]\Delta\tilde y_b^{(0)}. \end{aligned} \tag{39}$$

Here

$$\Delta\tilde y_a^{(0)} = \int_P (d\tau\, y_a^{(0)\prime} + d\sigma\, \dot y_a^{(0)}), \quad \Delta\tilde x^{(0)i} = \int_P (d\tau\, x^{(0)\prime i} + d\sigma\, \dot x^{(0)i}), \tag{40}$$

are the variables T-dual to the coordinates y_a and x^i in the zeroth order in $B_{\mu\nu\rho}$, for $b_{\mu\nu} = 0$, which we call the double variables.

Thus, we obtain the explicit form of the T-dual action and conclude that it is given in terms of the original coordinates x^i and the dual coordinates y_a originating from the Lagrange multipliers. However, the background fields' argument depends not only on these variables but on their doubles as well. Because of this the theory is non-local as the double variables $\tilde{x}^i$ and $\tilde{y}_a$ are defined as line integrals.

The action (36) can be obtained from the initial action (8) under the following substitutions of the coordinate derivatives and the background fields:

$$\partial_\pm x^i \to \partial_\pm x^i, \quad \partial_\pm x^a \to \partial_\pm y_a, \tag{41}$$

$$\begin{aligned} &\Pi_{+ij} \to {}^\bullet\Pi_{+ij}, \quad \Pi_{+ia} \to {}^\bullet\Pi_{+i}{}^{a}, \\ &\Pi_{+ai} \to {}^\bullet\Pi^a_{+i}, \quad \Pi_{+ab} \to {}^\bullet\Pi^{ab}_{+}, \end{aligned} \tag{42}$$

where the dual background fields are

$$\begin{aligned} &{}^\bullet\Pi_{+ij} = \overline{\Pi}_{+ij}, \quad {}^\bullet\Pi_{+i}{}^{a} = -\kappa\Pi_{+ib}\tilde{\Theta}^{ba}_{-}, \\ &{}^\bullet\Pi^a_{+i} = \kappa\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\Pi_{+bi}, \quad {}^\bullet\Pi^{ab}_{+} = \frac{\kappa}{2}\tilde{\Theta}^{ab}_{-}, \end{aligned} \tag{43}$$

with $\overline{\Pi}_{+ij}$, $\Pi_{+\mu\nu}$, and $\tilde{\Theta}^{ab}_{-}$ defined in (37), (9), and (A.7). The argument of all T-dual background fields is $[x^i, V^a(x^i, y_a)]$. According to (27) and (39), it is non-local and consequently non-geometric. Calculating the symmetric and antisymmetric part of the T-dual field compositions (43), we find that the T-dual metric and Kalb–Ramond field are equal to

$$\begin{aligned} {}^\bullet G_{ij} &= \overline{G}_{ij} = G_{ij} - G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -2\kappa\left(B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} + G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj}\right) - 4B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj}, \\ {}^\bullet B_{ij} &= \overline{B}_{ij} = B_{ij} - \frac{\kappa}{2}G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} - B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj} - 2\kappa B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj}, \\ {}^\bullet G^{ab} &= (\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}, \\ {}^\bullet B^{ab} &= \frac{\kappa}{2}\tilde{\theta}^{ab}, \\ {}^\bullet G^a{}_i &= \kappa\tilde{\theta}^{ab}G_{bi} + 2(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bi}, \\ {}^\bullet B^a{}_i &= \kappa\tilde{\theta}^{ab}B_{bi} + \frac{1}{2}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bi}, \end{aligned} \tag{44}$$

where $\tilde{G}_{Eab}$ and $\tilde{\theta}^{ab}$ are defined in (A.6) and (A.10). The T-dual background fields have the same form as in the flat background [1,5,25] but in the present case fields $B_{\mu\nu}$, $\tilde{G}^{-1ab}_E$ and $\tilde{\theta}^{ab}$ are coordinate dependent.

Comparing the solutions for the gauge fields (31) and (35), we obtain the T-dual coordinate transformation law

$$\begin{aligned} \partial_\mp x^a \cong &-2\kappa\tilde{\Theta}^{ab}_{\mp}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big) \\ &\times\Big[\Pi_{\pm bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_\mp x^i + \frac{1}{2}\partial_\mp y_b \\ &\mp\beta^\pm_b\big(x^i, V^a(x^i, y_a)\big)\Big]. \end{aligned} \tag{45}$$

4 Inverse T-dualization $\mathcal{T}_a : S[x^i, y_a] \to S[x^\mu]$

In this section we will show that T-dualization of the action $S[x^i, y_a]$, given by (36), along already treated directions y_a leads to the original action.

So, let us localize the global symmetry of the coordinates y_a

$$\delta y_a = \lambda_a, \tag{46}$$

of the action (36). Note that this is the symmetry, despite the coordinate dependence of the metric (44), due to the invariance of the background fields' argument [18]. Following the T-dualization procedure, we substitute the ordinary derivatives with the covariant ones

$$D_\pm y_a = \partial_\pm y_a + u_{\pm a}, \tag{47}$$

where $u_{\pm a}$ are gauge fields which transform as $\delta u_{\pm a} = -\partial_\pm\lambda_a$. We also substitute coordinates y_a in the background fields' argument with the invariant coordinates

$$\begin{aligned} y^{\text{inv}}_a &= \int_P (d\xi^+ D_+ y_a + d\xi^- D_- y_a) \\ &= y_a(\xi) - y_a(\xi_0) + \Delta U_a, \end{aligned} \tag{48}$$

where

$$\Delta U_a = \int_P (d\xi^+ u_{+a} + d\xi^- u_{-a}). \tag{49}$$

In this way, adding the Lagrange multiplier term which makes the introduced gauge fields nonphysical, we obtain the gauge invariant action

$$\begin{aligned} &S_{\text{inv}}[x^i, y_a, y^{\text{inv}}_a, z^a] \\ &= \kappa\int d^2\xi\Big[\partial_+ x^i\overline{\Pi}_{+ij}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big)\partial_- x^j \\ &\quad -\kappa\,\partial_+ x^i\Pi_{+ia}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big) \\ &\quad \times\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big)D_- y_b \\ &\quad +\kappa\,D_+ y_a\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big) \\ &\quad \times\Pi_{+bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big)\partial_- x^i \\ &\quad +\frac{\kappa}{2}D_+ y_a\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y^{\text{inv}}_a)\big)D_- y_b \\ &\quad +\frac{1}{2}(u_{+a}\partial_- z^a - u_{-a}\partial_+ z^a)\Big], \end{aligned} \tag{50}$$

which after fixing the gauge by $y_a(\xi) = y_a(\xi_0)$ becomes

$$\begin{aligned} &S_{\text{fix}}[x^i, u_{\pm a}, z^a] \\ &= \kappa\int d^2\xi\Big[\partial_+ x^i\overline{\Pi}_{+ij}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)\partial_- x^j \\ &\quad -\kappa\,\partial_+ x^i\Pi_{+ia}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big) \\ &\quad \times\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)u_{-b} \end{aligned}$$

$$+\kappa\, u_{+a}\tilde{\Theta}_-^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)$$
$$\times\, \Pi_{+bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)\partial_- x^i$$
$$+\frac{\kappa}{2}\, u_{+a}\tilde{\Theta}_-^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)u_{-b}$$
$$+\frac{1}{2}(u_{+a}\partial_- z^a - u_{-a}\partial_+ z^a)\Big], \quad (51)$$

where ΔV^a is defined in (39) and ΔU_a in (49).

4.1 Regaining the T-dual action

The equations of motion obtained varying the gauge fixed action (51) over the Lagrange multipliers z^a

$$\partial_+ u_{-a} - \partial_- u_{+a} = 0, \quad (52)$$

have the solution

$$u_{\pm a} = \partial_\pm y_a. \quad (53)$$

On this solution the variable ΔU_a defined by (49) is path independent and reduces to

$$\Delta U_a(\xi) = y_a(\xi) - y_a(\xi_0), \quad (54)$$

and the gauge fixed action (51) reduces to the action (36).

4.2 Regaining the initial action

The equations of motion obtained varying the gauge fixed action (51) over the gauge fields $u_{\pm a}$ are

$$\kappa\tilde{\Theta}_\mp^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)$$
$$\times\Big[\frac{1}{2}u_{\mp b} + \Pi_{\pm bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)\partial_\mp x^i\Big] + \frac{1}{2}\partial_\mp z^a$$
$$= \pm\kappa\tilde{\Theta}_{0\mp}^{ab}\beta_b^\pm\big(x^i, V^a(x^i, U_a)\big), \quad (55)$$

where terms $\tilde{\Theta}_{0\mp}^{ab}\beta_b^\pm$ are the contribution from the variation over the background field argument

$$\delta_U S_{\text{fix}} = -\kappa^2\int d^2\xi\,\big(\delta u_{+a}\tilde{\Theta}_{0-}^{ab}\beta_b^+ + \delta u_{-a}\tilde{\Theta}_{0+}^{ab}\beta_b^-\big). \quad (56)$$

Here $\beta_a^\pm$ is of the same form as (34) and $\tilde{\Theta}_{0\mp}^{ab}$ is defined in (A.11).

Let us show that for the equations of motion (55), the gauge fixed action (51) will reduce to the initial action (8). Using the fact that $\tilde{\Theta}_\mp^{ab}$ is inverse to $2\kappa\Pi_{\pm ab}$, these equations of motion can be rewritten as

$$u_{\mp a} = -2\Pi_{\pm ai}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)\partial_\mp x^i$$
$$-2\Pi_{\pm ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, \Delta U_a)\big)\partial_\mp z^b$$
$$\pm 2\beta_a^\pm\big(x^i, V^a(x^i, U_a)\big). \quad (57)$$

Substituting (57) into (51), using the definition (37) and the first relation in (A.22) one obtains

$$S[x^i, z^a]$$
$$= \kappa\int_\Sigma d^2\xi\Big[\partial_+ x^i\Pi_{+ij}\partial_- x^j + \partial_+ x^i\Pi_{+ia}\partial_- z^a$$
$$+\partial_+ z^a\Pi_{+ai}\partial_- x^i + \partial_+ z^a\Pi_{+ab}\partial_- z^b\Big]. \quad (58)$$

The explicit form of the argument of the background fields is obtained substituting the zeroth order of Eq. (57) into (49)

$$U_a^{(0)} = -2b_{ai}x^{(0)i} + G_{ai}\tilde{x}^{(0)i} - 2b_{ab}z^{(0)b} + G_{ab}\tilde{z}^{(0)b}. \quad (59)$$

Consequently, the argument of the background fields ΔV^a, defined in (39), is just

$$V^{(0)a}(x^i, U_a) = z^a. \quad (60)$$

So, the action (58) is equal to the initial action (8) with $x^\mu = (x^i, z^a)$.

Comparing the solutions for the gauge fields (53) and (57), we obtain the T-dual transformation law

$$\partial_\mp y_a \cong -2\Pi_{\pm ai}(x^i, z^a)\partial_\mp x^i - 2\Pi_{\pm ab}(x^i, z^a)\partial_\mp z^b$$
$$\pm 2\beta_a^\pm\big(x^i, z^a\big). \quad (61)$$

Substituting $\partial_\mp y_a$ to (45) with the help of (60) one finds $\partial_\pm x^a = \partial_\pm z^a$. Therefore, (61) is the transformation inverse to (45), which confirms the relation $\mathcal{T}^a \circ \mathcal{T}_a = 1$.

5 T-dualization along all undualized coordinates $\mathcal{T}^i : S[x^i, y_a] \to S[y_\mu]$

In this section we will T-dualize the action (36), applying the T-dualization procedure to the undualized coordinates x^i. Substituting the ordinary derivatives $\partial_\pm x^i$ with the covariant derivatives

$$D_\pm x^i = \partial_\pm x^i + w_\pm^i, \quad (62)$$

where the gauge fields $w_\pm^i$ transform as $\delta w_\pm^i = -\partial_\pm\lambda^i$, substituting the coordinates x^i in the background field arguments with

$$\Delta x_{\text{inv}}^i = \int_P (d\xi^+ D_+ x^i + d\xi^- D_- x^i), \quad (63)$$

and adding the Lagrange multiplier term, we obtain the gauge invariant action

$$S_{\text{inv}}[x^i, x_{\text{inv}}^i, y]$$
$$= \kappa\int d^2\xi\Big[D_+ x^i\overline{\Pi}_{+ij}\big(\Delta x_{\text{inv}}^i, \Delta V^a(\Delta x_{\text{inv}}^i, y_a)\big)D_- x^j$$
$$-\kappa\, D_+ x^i\Pi_{+ia}\big(\Delta x_{\text{inv}}^i, \Delta V^a(\Delta x_{\text{inv}}^i, y_a)\big)$$

$$\times\,\tilde{\Theta}_-^{ab}\big(\Delta x^i_{\rm inv},\,\Delta V^a(\Delta x^i_{\rm inv},\,y_a)\big)\partial_- y_b$$
$$+\kappa\,\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}\big(\Delta x^i_{\rm inv},\,\Delta V^a(\Delta x^i_{\rm inv},\,y_a)\big)$$
$$\times\,\Pi_{+bi}\big(\Delta x^i_{\rm inv},\,\Delta V^a(\Delta x^i_{\rm inv},\,y_a)\big)D_- x^i$$
$$+\frac{\kappa}{2}\,\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}\big(\Delta x^i_{\rm inv},\,\Delta V^a(\Delta x^i_{\rm inv},\,y_a)\big)\partial_- y_b$$
$$+\frac{1}{2}(w^i_+\partial_- y_i - w^i_-\partial_+ y_i)\Big]. \qquad (64)$$

Substituting the gauge fixing condition $x^i(\xi) = x^i(\xi_0)$ one obtains

$$S_{\rm fix}[x^i, w^i_\pm, y]$$
$$= \kappa\int d^2\xi\Big[w^i_+\overline{\Pi}_{+ij}(\Delta W)w^j_-$$
$$-\kappa\, w^i_+\Pi_{+ia}(\Delta W)\tilde{\Theta}_-^{ab}(\Delta W)\partial_- y_b$$
$$+\kappa\,\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}(\Delta W)\Pi_{+bi}(\Delta W)w^i_-$$
$$+\frac{\kappa}{2}\,\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}(\Delta W)\partial_- y_b$$
$$+\frac{1}{2}(w^i_+\partial_- y_i - w^i_-\partial_+ y_i)\Big], \qquad (65)$$

where $\Delta W^\mu = \big[\Delta W^i, \Delta V^a(\Delta W^i, y_a)\big]$ with ΔW^i defined by

$$\Delta W^i \equiv \int_P (d\xi^+ w^i_+ + d\xi^- w^i_-), \qquad (66)$$

and $\Delta V^a = \Delta V^a(\Delta W^i, y_a)$ is defined in (39), where argument x^i is replaced by ΔW^i.

5.1 Regaining the T-dual action

The equations of motion for the Lagrange multipliers y_i are

$$\partial_+ w^i_- - \partial_- w^i_+ = 0, \qquad (67)$$

and they have the solution

$$w^i_\pm = \partial_\pm x^i. \qquad (68)$$

For this solution the background field argument ΔW^i defined in (66) reduces to

$$\Delta W^i(\xi) = x^i(\xi) - x^i(\xi_0), \qquad (69)$$

so that the argument ΔV^a becomes

$$\Delta V^a(\Delta W^i, y^a) = \Delta V^a(x^i, y^a), \qquad (70)$$

and therefore the gauge fixed action (65) reduces to the action (36).

5.2 From the gauge fixed action to the completely T-dual action

The equations of motion obtained varying the gauge fixed action (65) over $w^i_\pm$ are

$$\overline{\Pi}_{\pm ij}(\Delta W)w^j_\mp - \kappa\,\Pi_{\pm ia}(\Delta W)\tilde{\Theta}_\mp^{ab}(\Delta W)\partial_\mp y_b + \frac{1}{2}\partial_\mp y_i$$
$$= \pm 2\kappa\,\overline{\Pi}_{\pm ij}\Theta_\mp^{j\mu}\beta^\pm_\mu(W), \qquad (71)$$

where

$$\beta^\pm_\mu(V) = \mp\frac{1}{2}h_{\mu\nu}(V)\partial_\mp V^\nu. \qquad (72)$$

Terms $\overline{\Pi}_{\pm ij}\Theta_\mp^{j\mu}\beta^\pm_\mu(W)$ are the contribution from the background fields' argument, defined by

$$\delta_U S_{\rm fix} = -2\kappa^2\int d^2\xi\Big(\delta w^i_+\overline{\Pi}_{+ij}\Theta_-^{j\mu}\beta^+_\mu$$
$$+\delta w^i_-\overline{\Pi}_{-ij}\Theta_+^{j\mu}\beta^-_\mu\Big), \qquad (73)$$

calculated using (A.15), (A.16), and (39).

Using the fact that the background field composition $\overline{\Pi}_{\pm ij}$ is invese to $2\kappa\Theta_\mp^{ij}$ defined by (A.22), we can rewrite the equation of motion (71) expressing the gauge fields as

$$w^i_\mp = 2\kappa\Theta_\mp^{ij}(\Delta W)\Big[\kappa\,\Pi_{\pm ja}(\Delta W)\tilde{\Theta}_\mp^{ab}(\Delta W)\partial_\mp y_b$$
$$-\frac{1}{2}\partial_\mp y_j\Big] \pm 2\kappa\,\Theta_{0\pm}^{i\mu}\beta^\pm_\mu(W). \qquad (74)$$

Using the second relation in (A.23), we obtain

$$w^i_\mp = -\kappa\Theta_\mp^{i\mu}(\Delta W)\Big[\partial_\mp y_\mu \mp 2\beta^\pm_\mu(W)\Big]. \qquad (75)$$

Substituting (75) into the gauge fixed action (65), we obtain

$$S[y]$$
$$= \kappa\int d^2\xi\Big[\partial_+ y_i\Big(\kappa\Theta_-^{ij} - \kappa^2\Theta_-^{ik}\overline{\Pi}_{+kl}\Theta_-^{lj}\Big)\partial_- y_j$$
$$+\Big(-\kappa^2\Theta_-^{ij}\overline{\Pi}_{+jk}\Theta_-^{ka} + \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{ia} - \kappa^2\Theta_-^{ij}\Pi_{+jb}\tilde{\Theta}_-^{ba}\Big)$$
$$\times\,\partial_+ y_i\,\partial_- y_a$$
$$+\Big(-\kappa^2\Theta_-^{aj}\overline{\Pi}_{+jk}\Theta_-^{ki} + \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{ai} - \kappa^2\tilde{\Theta}_-^{ab}\Pi_{+bj}\Theta_-^{ji}\Big)$$
$$\times\,\partial_+ y_a\,\partial_- y_i + \partial_+ y_a\Big(\frac{\kappa}{2}\tilde{\Theta}_-^{ab} - \kappa^2\Theta_-^{ai}\overline{\Pi}_{+ij}\Theta_-^{jb}$$
$$-\kappa^2\Theta_-^{ai}\Pi_{+ic}\tilde{\Theta}_-^{cb} - \kappa^2\tilde{\Theta}_-^{ac}\Pi_{+ci}\Theta_-^{ib}\Big)\partial_- y_b\Big]. \qquad (76)$$

Using (A.22), (A.27), and (A.29) one can rewrite this action as

$$S[y] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\,\partial_+ y_\mu\Theta_-^{\mu\nu}(\Delta W)\partial_- y_\nu. \qquad (77)$$

In order to find the background fields' argument ΔW^i, we consider the zeroth order of Eqs. (75), and we conclude that

$$\Delta W^i = -\kappa\theta_0^{i\mu}\Delta y_\mu + (g^{-1})^{i\mu}\Delta\tilde{y}_\mu. \tag{78}$$

Using (A.28) and (A.23), we find that $\Delta V^a(\Delta W^i, y^a)$ defined in (39) equals

$$\Delta V^a(\Delta W^i, y_a) = -\kappa\theta_0^{a\mu}\Delta y_\mu + (g^{-1})^{a\mu}\Delta\tilde{y}_\mu. \tag{79}$$

Therefore, we conclude that the background fields' argument is equal to (18), so that the action (77) is the completely T-dual action (14), which is in agreement with Ref. [18]. Comparing the solutions for the gauge fields (68) and (75), we obtain the T-dual transformation law

$$\partial_\mp x^i \cong -\kappa\Theta_\mp^{i\mu}\big(\Delta V(y)\big)\Big[\partial_\mp y_\mu \mp 2\beta_\mu^\pm\big(V(y)\big)\Big]. \tag{80}$$

One can verify that two successive T-duality transformations (45) and (80) correspond to the total T-duality transformation (20). Indeed, the relation (80) is just the ith component of this transformation. Substituting $\partial_\pm x^i$ from (80) into (45), using (A.25) and (A.29), we obtain

$$\partial_\pm x^a = -\kappa\Theta_\pm^{a\mu}(\Delta V)\Big[\partial_\pm y_\mu \pm 2\beta_\mu^\mp(V)\Big],$$

which is just the ath component of the complete T-duality transformation. So, we confirm that $\mathcal{T}^a \circ \mathcal{T}^i = \mathcal{T}$.

6 Inverse T-dualization along arbitrary subset of the dual coordinates $\mathcal{T}_i : S[y_\mu] \to S[x^i, y_a]$

Finally, in this section we will show that the T-dualization of the completely T-dual action (14), along arbitrary subset of the dual coordinates y_i leads to T-dual action (36). So, let us start with the T-dual action

$$S[y] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\ \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}\big(\Delta V(y)\big)\partial_- y_\nu, \tag{81}$$

which is globally invariant to the constant shift of coordinates y_μ

$$\delta y_\mu = \lambda_\mu. \tag{82}$$

We localize this symmetry for the coordinates y_i and obtain the locally invariant action

$$\begin{aligned} &S_{\text{inv}}[y, y_i^{\text{inv}}, z^i] \\ &= \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\Big[D_+y_i\Theta_-^{ij}\big(\Delta V(y_i^{\text{inv}}, y_a)\big)D_-y_j \\ &\quad + D_+y_i\Theta_-^{ia}\big(\Delta V(y_i^{\text{inv}}, y_a)\big)\partial_-y_a \\ &\quad +\partial_+y_a\Theta_-^{ai}\big(\Delta V(y_i^{\text{inv}}, y_a)\big)D_-y_i \\ &\quad + \partial_+y_a\Theta_-^{ab}\big(\Delta V(y_i^{\text{inv}}, y_a)\big)\partial_-y_b \\ &\quad + \frac{1}{\kappa}(u_{+i}\partial_-z^i - u_{-i}\partial_+z^i)\Big], \end{aligned} \tag{83}$$

where $D_\pm y_i = \partial_\pm y_i + u_{\pm i}$ are the covariant derivatives. The gauge fields $u_{\pm i}$ transform as $\delta u_{\pm i} = -\partial_\pm\lambda_i$ and the invariant coordinates are defined by $y_i^{\text{inv}} = \int_P(d\xi^+ D_+y_i + d\xi^- D_-y_i)$. After fixing the gauge by $y_i(\xi) = y_i(\xi_0)$, the action becomes

$$\begin{aligned} &S_{\text{fix}}[y_a, u_{\pm i}, z^i] \\ &= \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\Big[u_{+i}\Theta_-^{ij}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)u_{-j} \\ &\quad + u_{+i}\Theta_-^{ia}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)\partial_-y_a \\ &\quad + \partial_+y_a\Theta_-^{ai}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)u_{-i} \\ &\quad + \partial_+y_a\Theta_-^{ab}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)\partial_-y_b \\ &\quad + \frac{1}{\kappa}(u_{+i}\partial_-z^i - u_{-i}\partial_+z^i)\Big], \end{aligned} \tag{84}$$

where $\Delta U_i = \int_P(d\xi^+ u_{+i} + d\xi^- u_{-i})$.

6.1 Regaining the T-dual action

The equations of motion obtained varying the gauge fixed action (84) over the Lagrange multipliers

$$\partial_+u_{-i} - \partial_-u_{+i} = 0, \tag{85}$$

have the solution

$$u_{\pm i} = \partial_\pm y_i. \tag{86}$$

On this solution the variable ΔU_i reduces to

$$\Delta U_i(\xi) = y_i(\xi) - y_i(\xi_0), \tag{87}$$

and therefore

$$\Delta V^\mu(\Delta U_i, y_a) = \Delta V^\mu(y). \tag{88}$$

So, the action (84) becomes the action (81).

6.2 Obtaining the T-dual action

The equations of motion obtained varying the action (84) over $u_{\pm i}$ are

$$\begin{aligned} &\kappa\Theta_\mp^{ij}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)u_{\mp j} + \kappa\Theta_\mp^{ia}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)\partial_\mp y_a \\ &\quad +\partial_\mp z^i = \pm 2\kappa\Theta_{0\mp}^{i\mu}\beta_\mu^\pm\big(V(U_i, y_a)\big), \end{aligned} \tag{89}$$

where $\beta_\mu^\pm$ are given by (72). The terms with beta function come from the variation over the argument U_i

$$\delta_U S_{\text{fix}} = -\kappa^2\int d^2\xi\big(\delta u_{+i}\Theta_{0-}^{i\mu}\beta_\mu^+ + \delta u_{-i}\Theta_{0+}^{i\mu}\beta_\mu^-\big), \tag{90}$$

and are calculated using (A.15) and (18). Using the fact that $2\kappa\overline{\Pi}_{\mp ij}$ is the inverse of $\Theta_{\pm}^{ij}$, the equation (89) can be rewritten as

$$u_{\mp i} = -2\overline{\Pi}_{\pm ij}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big)\Big[\kappa\Theta_{\mp}^{ja}\big(\Delta V(\Delta U_i, y_a)\big) \times\partial_{\mp}y_a + \partial_{\mp}z^j \mp 2\kappa\Theta_{0\mp}^{j\mu}\beta_{\mu}^{\pm}\big(V(U_i, y_a)\big)\Big]. \tag{91}$$

Substituting (91) into the gauge fixed action (84), using (A.25) we obtain

$$S[z^i, y_a] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\Big[\frac{2}{\kappa}\partial_+ z^i\overline{\Pi}_{+ij}\partial_- z^j + 2\partial_+ z^i\overline{\Pi}_{+ij}\Theta_-^{jb}\partial_- y_b - 2\partial_+ y_a\Theta_-^{ai}\overline{\Pi}_{+ij}\partial_- z^j + \partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}\partial_- y_b\Big], \tag{92}$$

which with the help of (A.29) becomes

$$S[z^i, y_a] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\Big[\frac{2}{\kappa}\partial_+ z^i\overline{\Pi}_{+ij}\partial_- z^j -2\partial_+ z^i\Pi_{+ia}\tilde{\Theta}_-^{ab}\partial_- y_b + 2\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}\Pi_{+bj}\partial_- z^j +\partial_+ y_a\tilde{\Theta}_-^{ab}\partial_- y_b\Big]. \tag{93}$$

In order to find the argument of the background fields $\Delta V(\Delta U_i, y_a)$, one considers the zeroth order of Eqs. (91) and obtains

$$\begin{aligned}\Delta U_i^{(0)} = &-\Big[\overline{\Pi}_{0+ij} + \overline{\Pi}_{0-ij}\Big]\Delta z^{(0)j} \\ &+\Big[\overline{\Pi}_{0+ij} - \overline{\Pi}_{0-ij}\Big]\Delta\tilde{z}^{(0)j} \\ &-\kappa\Big[\overline{\Pi}_{0+ij}\Theta_{0-}^{ja} + \overline{\Pi}_{0-ij}\Theta_{0+}^{ja}\Big]\Delta y_a^{(0)} \\ &+\kappa\Big[\overline{\Pi}_{0+ij}\Theta_{0-}^{ja} - \overline{\Pi}_{0-ij}\Theta_{0+}^{ja}\Big]\Delta\tilde{y}_a^{(0)},\end{aligned} \tag{94}$$

where the double variables are defined in analogy with (40). Substituting (94) into (18), we obtain

$$\Delta V^i(\Delta U_i, y_a) = \Delta z^i, \tag{95}$$

and

$$\begin{aligned}\Delta V^a(\Delta U_i, y_a) = &-\kappa\Big[\tilde{\Theta}_{0+}^{ab}\Pi_{0-bi} + \tilde{\Theta}_{0-}^{ab}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta z^{(0)i} \\ &-\kappa\Big[\tilde{\Theta}_{0+}^{ab}\Pi_{0-bi} - \tilde{\Theta}_{0-}^{ab}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta\tilde{z}^{(0)i} \\ &-\frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}_{0+}^{ab} + \tilde{\Theta}_{0-}^{ab}\Big]\Delta y_b^{(0)} \\ &-\frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}_{0+}^{ab} - \tilde{\Theta}_{0-}^{ab}\Big]\Delta\tilde{y}_b^{(0)},\end{aligned} \tag{96}$$

which is exactly (39) with $z^i = x^i$. So, we can conclude that the action (93) is equal to the T-dual action (36).

Comparing the solutions for the gauge fields (86) and (91), we obtain the T-dual transformation law

$$\partial_{\mp}y_i \cong -2\overline{\Pi}_{\pm ij}\big(\Delta z^i, \Delta V^a(\Delta U_i(z^i, y_a), y_a)\big) \times\Big[\kappa\Theta_{\mp}^{ja}\big(\Delta z^i, \Delta V^a(\Delta U_i(z^i, y_a), y_a)\big)\partial_{\mp}y_a + \partial_{\mp}z^j \mp 2\kappa\Theta_{0\mp}^{j\mu}\beta_{\mu}^{\pm}\big(z^i, V^a(U_i(z^i, y_a), y_a)\big)\Big]. \tag{97}$$

These transformations are inverse to (80), so that $\mathcal{T}^i \circ \mathcal{T}_i = 1$. Successively applying (97) and (61), using (A.29) and (A.25), we obtain the ith component of the inverse law of the total T-dualization (21). Its ath component is (61), so we confirm that $\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_i = \tilde{\mathcal{T}}$.

7 Group of the T-dual transformation laws

In this section we will recapitulate the coordinate transformation laws between the theories considered. In Sect. 3, we performed the T-dualization procedure along the coordinates x^a

$$\mathcal{T}^a : S[x^\mu] \to S[x^i, y_a], \tag{98}$$

and obtained the following coordinate transformation law: (45)

$$\partial_{\mp}x^a \cong -2\kappa\tilde{\Theta}_{\mp}^{ab}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big) \times\Big[\Pi_{\pm bi}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)\partial_{\mp}x^i + \frac{1}{2}\partial_{\mp}y_b \mp\beta_b^{\pm}\big(x^i, V^a(x^i, y_a)\big)\Big] \tag{99}$$

where V^a and $\beta_a^{\pm}$ are given by (39) and (34). In the zeroth oder this law implies

$$x^{(0)a} \cong V^{(0)a}(x^i, y_a). \tag{100}$$

In Sect. 4, starting from the action $S[x^i, y_a]$ we performed the T-dualization procedure along the coordinates y_a

$$\mathcal{T}_a : S[x^i, y_a] \to S[x^\mu], \tag{101}$$

and obtained the transformation law (61)

$$\partial_{\mp}y_a \cong -2\Pi_{\pm a\mu}(x)\partial_{\mp}x^\mu \pm 2\beta_a^{\pm}(x), \tag{102}$$

which is the law inverse to (99) and in the zeroth order it implies

$$y_a^{(0)} \cong U_a^{(0)}(x). \tag{103}$$

Multiplying the transformation law (99) from the left side by $\Pi_{\pm ca}(x) \cong \Pi_{\pm ca}\big(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)\big)$, using (100), we obtain the transformation law (102). So, we confirm that $\mathcal{T}^a \circ \mathcal{T}_a = 1$.

In Sect. 5, starting once again from the action $S[x^i, y_a]$, we performed the T-dualization procedure along the undualized coordinates x^i

$$\mathcal{T}^i : S[x^i, y_a] \to S[y_\mu], \tag{104}$$

and obtained the coordinate transformation law (80)

$$\partial_\mp x^i \cong -\kappa \Theta_\mp^{i\mu}\big(\Delta V(y)\big)\Big[\partial_\mp y_\mu \mp 2\beta_\mu^\pm\big(V(y)\big)\Big], \tag{105}$$

where V^μ and $\beta_\mu^\pm$ are given by (18) and (72). In the zeroth order it gives

$$x^{(0)i} \cong V^{(0)i}(y). \tag{106}$$

The two successive T-duality transformations (99) and (105) give the complete transformation (20), so that $\mathcal{T}^a \circ \mathcal{T}^i = \mathcal{T}$.

In Sect. 6, starting from the completely T-dual action $S[y]$, we performed the T-dualization procedure along the coordinates y_i

$$\mathcal{T}_i : S[y_\mu] \to S[x^i, y_a], \tag{107}$$

and obtained (97)

$$\begin{aligned}\partial_\mp y_i \cong\ & -2\overline{\Pi}_{\pm ij}\big(\Delta x^i, \Delta V^a(\Delta U_i(x^i, y_a), y_a)\big)\\ &\times\Big[\kappa\Theta_\mp^{ja}\big(\Delta x^i, \Delta V^a(\Delta U_i(x^i, y_a), y_a)\big)\partial_\mp y_a + \partial_\mp x^j\\ &\mp 2\kappa\Theta_{0\mp}^{j\mu}\beta_\mu^\pm\big(x^i, V^a(U_i(x^i, y_a), y_a)\big)\Big],\end{aligned} \tag{108}$$

with V^a, U_i, and $\beta_\mu^\pm$ given by (79), (94), and (72). In the zeroth order this law implies

$$y_i^{(0)} \cong U_i^{(0)}(x^i, y_a). \tag{109}$$

Multiplying (108) from the left by

$$\Theta_\mp^{ki}\big(\Delta x^i, \Delta V^a(y)\big) \cong \Theta_\mp^{ki}\big(\Delta x^i, \Delta V^a(\Delta U_i(x^i, y_a), y_a)\big),$$

using (106), we obtain the transformation law (105), so that $\mathcal{T}^i \circ \mathcal{T}_i = 1$. Successively applying (108) and (102), using (A.29) and (A.25), we obtain the ith component of the inverse law of the complete T-dualization (21). Its ath component is (102), so we confirm that $\mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}_i = \tilde{\mathcal{T}}$.

We can conclude that the elements $1, \mathcal{T}^a$ and $\mathcal{T}_a$, with $d = 1, \ldots, D$, form an Abelian group. The element $\mathcal{T}^a$ is the inverse of the element $\mathcal{T}_a$.

8 Dilaton field in the weakly curved background

The T-duality transformation of the dilaton field in the weakly curved background was considered in Ref. [26]. For completeness and further use, we give here a brief recapitulation of some basic steps of the treatment.

It is well known that a dilaton transformation has a quantum origin. So, let us start with the path integral for the gauge fixed action

$$\mathcal{Z} = \int \mathrm{d}v_+^\mu \mathrm{d}v_-^\mu \mathrm{d}y_\mu e^{iS_{\text{fix}}(v_\pm, \partial_\pm y)}, \tag{110}$$

where

$$S_{\text{fix}}(v_\pm, \partial_\pm y) = S_0 + S_1\,, \tag{111}$$

with S_1 being the infinitesimal part of the action

$$\begin{aligned} S_0 &= \kappa \int \mathrm{d}^2\xi\,[v_+^\mu \Pi_{0+\mu\nu} v_-^\nu + \frac{1}{2}(v_+^\mu \partial_- y_\mu - v_-^\mu \partial_+ y_\mu)]\,,\\ S_1 &= \kappa \int \mathrm{d}^2\xi\ v_+^\mu h_{\mu\nu}(V) v_-^\nu\,. \end{aligned} \tag{112}$$

For a constant background ($S_1 = 0$) the path integral is Gaussian and it equals $(\det \Pi_{0+\mu\nu})^{-1}$. In our case the background is coordinate dependent and thus the integral is not Gaussian. The fact that we work with an infinitesimal parameter enables us to show that the final result is formally the same as in the flat case [26],

$$\mathcal{Z} = \int \mathrm{d}y_\mu \frac{1}{\det(\Pi_{+\mu\nu}(V))} e^{i\,{}^\star S(y)}, \tag{113}$$

where ${}^\star S(y) = \frac{\kappa^2}{2}\int \mathrm{d}^2\xi\ \partial_+ y_\mu\, \Theta_-^{\mu\nu}(V)\partial_- y_\nu$ is the complete T-dual action and $\Pi_{+\mu\nu}(V) = B_{\mu\nu}(V) + \frac{1}{2}G_{\mu\nu}$. Consequently, although for the weakly curved background the functional integration over $v_\pm$ is of the third degree, it produces formally the same result as in the flat space (where the action is Gaussian),

$${}^\bullet\Phi = \Phi - \ln\det\sqrt{2\Pi_{+ab}}. \tag{114}$$

Using the expressions for T-dual fields (43) we can find the relations between the determinants

$$\begin{aligned}\det(2\Pi_{\pm ab}) &= \frac{1}{\det(2\,{}^\bullet\Pi_\pm^{ab})} = \sqrt{\frac{\det G_{ab}}{\det {}^\bullet G^{ab}}}\\ &= \sqrt{\frac{\det G_{\mu\nu}}{\det {}^\bullet G_{\mu\nu}}},\end{aligned} \tag{115}$$

where because of the relation $\Pi_{\pm ab} = B_{ab} \pm \frac{1}{2}G_{ab}$ we put in the factor 2 for convenience. The symbol ${}^\bullet G_{\mu\nu}$ denotes metric in the whole space-time after partial T-dualization along x^a directions. With the help of last relation we can show that the change of space-time measure in the path integral is correct

$$\begin{aligned}&\sqrt{\det G_{\mu\nu}}\,\mathrm{d}x^i \mathrm{d}x^a \to \sqrt{\det G_{\mu\nu}}\,\mathrm{d}x^i \frac{1}{\det(2\,\Pi_{+ab})}\mathrm{d}y_a\\ &= \sqrt{\det {}^\bullet G_{\mu\nu}}\,\mathrm{d}x^i \mathrm{d}y_a,\end{aligned} \tag{116}$$

when we performed T-dualization T^a along x^a directions.

9 Comparison with the existing facts

9.1 T-dualization chain for the background with H flux

In this section we will compare our results with the T-dualization chain of Ref. [16]. The coordinates of the $D=3$-dimensional torus will be denoted by x^1, x^2, x^3. Because of the different notation, the background fields considered in this paper and those considered in [16], which will be denoted $\mathcal{G}$ and $\mathcal{B}$, are related by

$$\mathcal{B}_{\mu\nu} = -2B_{\mu\nu}, \quad \mathcal{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}, \quad \mu,\nu = 1,2,3. \tag{117}$$

Nontrivial components of the background considered in Ref. [16] are

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \mathcal{B}_{12} = Hx^3, \tag{118}$$

which in our notation corresponds to the background fields

$$G_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad B_{12} = -\frac{1}{2}Hx^3. \tag{119}$$

Let us first compare the results in the case $d=1$, corresponding to the transition

T^1 : torus with H-flux $\to$ twisted torus.

To do so, let us perform T-dualization along the direction x^1, $T^1 : S[x] \to S[y_1, x^2, x^3]$, for the string moving in the background (119). The indices take the values $a,b \in \{1\}$ and $i,j \in \{2,3\}$. Because the only nontrivial component of the Kalb–Ramond field is $B_{ai} = -\frac{1}{2}Hx^3\delta_{i2}$, the effective fields are just $\tilde{G}^E_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ and $\tilde{\theta}^{ab} = 0$. So, the T-dual background fields (44), in the linear order in H, are

$$\begin{aligned} &{}^\bullet G_{ij} = \delta_{ij}, \quad {}^\bullet B_{ij} = 0, \\ &{}^\bullet G^{ab} = \delta^{ab}, \quad {}^\bullet B^{ab} = 0, \\ &{}^\bullet G^a{}_i = -Hx^3\delta_{i2}, \quad {}^\bullet B^a{}_i = 0. \end{aligned} \tag{120}$$

Therefore

$${}^\bullet G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & -Hx^3 & 0 \\ -Hx^3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^\bullet\mathcal{G}_{\mu\nu}, \tag{121}$$

and

$${}^\bullet B_{\mu\nu} = 0 = {}^\bullet\mathcal{B}_{\mu\nu}, \tag{122}$$

so our result is in agreement with that of Ref. [16].

Now, let us make the comparison in the case $d=2$, which corresponds to the transition

$T^1 \circ T^2$: torus with H-flux $\to$ Q-flux non-geometry.

Instead to perform T^2 dualization, from twisted torus to Q-flux non-geometry as in [16], we will start from the initial background with H-flux and perform T-dualizations along x^1 and x^2, $T^1 \circ T^2 : S[x] \to S[y_1, y_2, x^3]$. The indices take the values $a,b \in \{1,2\}$ and $i,j \in \{3\}$. Because the only nontrivial contribution to the Kalb–Ramond field B_{ab} is $B_{12} = -\frac{1}{2}Hx^3$, the effective background fields are $\tilde{G}^E_{ab} = \delta_{ab}$, $\bar{G}^E_{ij} = \delta_{ij}$, and the only nonzero component of $\tilde{\theta}^{ab}$ is $\tilde{\theta}^{12} = \frac{1}{\kappa}Hx^3$. The T-dual background fields linear in H are therefore

$${}^\bullet G_{ij} = \delta_{ij}, \quad {}^\bullet G^{ab} = \delta^{ab}, \quad {}^\bullet G^a i = 0, \tag{123}$$

and

$${}^\bullet B_{ij} = 0, \quad {}^\bullet B^{12} = \frac{1}{2}Hx^3, \quad {}^\bullet B^a{}_i = 0. \tag{124}$$

Consequently

$${}^\bullet G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = {}^\bullet\mathcal{G}_{\mu\nu}, \tag{125}$$

$${}^\bullet\mathcal{B}_{\mu\nu} = -2\,{}^\bullet B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Hx^3 & 0 \\ Hx^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{126}$$

so the results of this paper and [16] in this case coincide.

9.2 Non-associativity of R-flux background and breaking of Jacobi identity

In Refs. [18,19] we obtained T-dual transformation laws connecting T-dual coordinates y_μ with the initial coordinates x^μ. Here we will reduce our case to the 3-dimensional torus with H-flux considered in [8]. Then, the full T-dualization along all coordinates corresponds to the so-called R-flux. So, we are going to calculate its characteristic features: non-associativity relation and breaking of Jacobi identity.

We will work in the background of Sect. 9.1 consisting of euclidean flat metric $G_{\mu\nu}$ and Kalb–Ramond field with one nontrivial component $B_{12} = -\frac{1}{2}Hx^3$. T-dual transformation laws for coordinates y_μ $(\mu = 1,2,3)$ are of the form

$$y_1' \cong \frac{1}{\kappa}\pi_1 + \frac{1}{2}Hx^3x'^2, \tag{127}$$

$$y_2' \cong \frac{1}{\kappa}\pi_2 - \frac{1}{2}Hx^3x'^1, \tag{128}$$

$$y_3' \cong \frac{1}{\kappa}\pi_3, \tag{129}$$

where π_1, π_2, π_3 are canonically conjugated momenta for coordinates x^1, x^2, x^3, respectively. The initial space is a geometric one, so, the standard Poisson algebra is satisfied,

$$\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar\sigma)\} = \delta^\mu{}_\nu \delta(\sigma - \bar\sigma),$$
$$\{x^\mu, x^\nu\} = \{\pi_\mu, \pi_\nu\} = 0. \quad (130)$$

From (127)–(129) we obtain

$$\{y'_\mu(\sigma), y'_\nu(\bar\sigma)\} = -\frac{1}{2\kappa} H\varepsilon_{\mu\nu\rho} x'^\rho \delta(\sigma - \bar\sigma), \quad (131)$$

which, after two partial integrations, produces

$$\{y_\mu(\sigma), y_\nu(\bar\sigma)\} = \frac{1}{2\kappa} H\varepsilon_{\mu\nu\rho} \left[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma - \bar\sigma), \quad (132)$$

where $\varepsilon_{\mu\nu\rho}$ is the 3-dimensional Levi-Civita tensor ($\varepsilon_{123} = 1$) and the function $\theta(\sigma)$ is defined as

$$\theta(\sigma) \equiv \begin{cases} 0 & \text{if} \quad \sigma = 0 \\ 1/2 & \text{if} \quad 0 < \sigma < 2\pi, \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \\ 1 & \text{if} \quad \sigma = 2\pi \end{cases} \quad (133)$$

Using the standard Poisson algebra (130) and transformation laws (127)–(129), after one partial integration, we get

$$\{\{y_\mu(\sigma_1), y_\nu(\sigma_2)\}, y_\rho(\sigma_3)\}$$
$$= \frac{1}{2\kappa^2} H\varepsilon_{\mu\nu\rho} [\theta(\sigma_2 - \sigma_1)\theta(\sigma_1 - \sigma_3)$$
$$+\theta(\sigma_1 - \sigma_2)\theta(\sigma_2 - \sigma_3)], \quad (134)$$

Now we have all ingredients to calculate the non-associativity relation

$$\{\{y_\mu(\sigma_1), y_\nu(\sigma_2)\}, y_\rho(\sigma_3)\} - \{y_\mu(\sigma_1), \{y_\nu(\sigma_2), y_\rho(\sigma_3)\}\}$$
$$= \frac{1}{2\kappa^2} H\varepsilon_{\mu\nu\rho} [2\theta(\sigma_3 - \sigma_2)\theta(\sigma_2 - \sigma_1)$$
$$+\theta(\sigma_1 - \sigma_3)\theta(\sigma_3 - \sigma_2) + \theta(\sigma_3 - \sigma_1)\theta(\sigma_1 - \sigma_2)] \quad (135)$$

and breaking of Jacobi identity

$$\{y_\mu(\sigma_1), y_\nu(\sigma_2), y_\rho(\sigma_3)\}$$
$$\equiv \{\{y_\mu(\sigma_1), y_\nu(\sigma_2)\}, y_\rho(\sigma_3)\} + \{\{y_\nu(\sigma_2), y_\rho(\sigma_3)\}, y_\mu(\sigma_1)\}$$
$$+\{\{y_\rho(\sigma_3), y_\mu(\sigma_1)\}, y_\nu(\sigma_2)\}$$
$$= \frac{1}{\kappa^2} H\varepsilon_{\mu\nu\rho} [\theta(\sigma_1 - \sigma_2)\theta(\sigma_2 - \sigma_3)$$
$$+ \theta(\sigma_3 - \sigma_1)\theta(\sigma_1 - \sigma_2) + \theta(\sigma_2 - \sigma_3)\theta(\sigma_3 - \sigma_1)]. \quad (136)$$

For example, for $\sigma_1 = 2\pi + \sigma$ and $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ one has

$$\{y_\mu(2\pi + \sigma), y_\nu(\sigma), y_\rho(\sigma)\} = -\frac{1}{\kappa^2} H\varepsilon_{\mu\nu\rho}. \quad (137)$$

In the approach of this article, the background of the T-dual theory depends on the non-local variable V^μ, which incorporates the main features of the non-geometric spaces. Reducing our procedure to three dimensions and using the backgrounds of Refs. [8,16,27], we showed that our structure of arguments of background fields proves the proposal of Refs. [8,27] that non-associativity and breaking of Jacobi identity are features of R-flux background.

9.3 Critical surface

Let us generalize the discussion of Ref. [20] where the critical surface, which separates equivalent sections of background fields, generalizes the critical radius. Using the dilaton field analysis, namely the relation (115), we can conclude that T-duality maps the theories with a given

$$\det(2\Pi_{\pm ab})$$

into the theories with

$$1/\det(2\Pi_{\pm ab}),$$

so that all different theories are in the region

$$\det(2\Pi_{\pm ab}) \leq 0.$$

The theories which background fields satisfy the condition $\det(2\Pi_{\pm ab}) = 1$, are mapped into each other under T-duality. This is a generalization of the critical radius and can be consider as a critical surface. So, relation (115) implies $\sqrt{\det G_{ab}} = \sqrt{\det {}^\bullet G^{ab}}$, which means that a dual volume is equal to the initial one. At the critical surface the extended symmetry should be expected.

Let us, following [20], give an example of the relation between the original and T-dual background fields. We will consider the initial background in the 4-dimensional torus T^4 given by

$$G_{\mu\nu} = g\delta_{\mu\nu}, \quad B_{\mu\nu} = b^i E^i_{\mu\nu}, \quad (138)$$

where

$$E^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$E^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (139)$$

satisfies

$$E^i E^j = -\delta^{ij} I + \varepsilon^{ijk} E^k, \qquad \varepsilon^{123} = 1. \quad (140)$$

The zero modes of the T-dual metric and T-dual Kalb–Ramond field (17) for the initial fields (138) are

$$^\star G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu} = \frac{g}{g^2+b^2}\, I \tag{141}$$

and

$$^\star B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\frac{b^i}{g^2+b^2}\, E^i\,, \tag{142}$$

with $b^2 = b^i b^i$. They have the same form as the initial fields (138)

$$^\star G_{\mu\nu} = {}^\star g\delta_{\mu\nu}, \quad {}^\star B_{\mu\nu} = {}^\star b^i E^i_{\mu\nu}, \tag{143}$$

with

$$^\star g = \frac{g}{g^2+b^2}, \quad {}^\star b = -\frac{b^i}{g^2+b^2}. \tag{144}$$

One easily shows

$$^\star g^2 + {}^\star b^2 = \frac{1}{g^2+b^2}. \tag{145}$$

In spheric coordinates one has

$$(g, b^1, b^2, b^3) = (r\cos\theta, r\sin\theta\cos\varphi,$$
$$r\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi_1, r\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi_1), \tag{146}$$

so $g^2 + b^2 = r^2$, and using (144) one obtains

$$({}^\star g, {}^\star b^1, {}^\star b^2, {}^\star b^3)$$
$$= \left(\frac{1}{r}\cos\theta, -\frac{1}{r}\sin\theta\cos\varphi, -\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi_1,\right.$$
$$\left.-\frac{1}{r}\sin\theta\sin\varphi\sin\varphi_1\right). \tag{147}$$

Therefore, T-duality transforms $(r, \theta, \varphi, \varphi_1)$ to

$$({}^\star r, {}^\star\theta, {}^\star\varphi, {}^\star\varphi_1) = \left(\frac{1}{r}, -\theta, \varphi, \varphi_1\right). \tag{148}$$

From the relation $\Pi_\pm G^{-1}\Pi_\mp = -\frac{1}{4}G_E$ we find

$$\det(2\Pi_{\pm\mu\nu}) = \frac{g^2}{{}^\star g^2} = (g^2+b^2)^2 = r^4\,. \tag{149}$$

Backgrounds corresponding to $r = 1$ are mapped into themselves. The subset of this is the fixed surface with the condition

$$\det(2\Pi_{\pm\mu\nu}) = r^4 = 1\,, \theta = 0$$

or $g = 1,\ b^i = 0$.

10 Conclusion

In this paper, we considered the closed string propagating in the weakly curved background (6), composed of a constant metric $G_{\mu\nu}$ and a linearly coordinate dependent Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu}$, with infinitesimal field strength. We investigated the application of the generalized T-dualization procedure on the arbitrary set of coordinates and obtained the following T-duality diagram:

$$\begin{tikzcd}
& S[x^i, y_a] \arrow[dl, shift left, "\mathcal{T}_a"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{T}^i"] & \\
S[x^\mu] \arrow[ur, shift left, "\mathcal{T}^a"] \arrow[rr, shift left, "\mathcal{T}"] & & S[y_\mu]. \arrow[ul, shift left, "\mathcal{T}_i"] \arrow[ll, shift left, "\tilde{\mathcal{T}}"]
\end{tikzcd}$$

Let us stress that generalized T-dualization procedure enables the T-dualization along arbitrary direction, even if the background fields depend on these directions. The consequence of this procedure is that the arguments of the background fields, such as ΔV^a, are non-local. They are non-local by definition, as they are the line integrals of the gauge fields. Once the explicit form is obtained the non-locality is seen in a fact that they depend on double coordinates $\tilde{x}$ and $\tilde{y}$, which are the line integrals of the τ and σ derivatives of the original coordinates. To all the theories considered, except the initial theory, there corresponds the non-geometric, non-local flux.

The generalized T-dualization procedure was first applied along arbitrary d ($d = 1, \ldots, D-1$) coordinates $x^a = \{x^{\mu_1}, \ldots, x^{\mu_d}\}$. We obtained the T-dual action $S[x^i, y_a]$, given by Eq. (36) with the dual background fields equal to

$$^\bullet\Pi_{+ij} = \overline{\Pi}_{+ij}, \quad {}^\bullet\Pi_{+i}{}^a = -\kappa\Pi_{+ib}\tilde{\Theta}_-^{ba},$$
$$^\bullet\Pi^a_{+i} = \kappa\tilde{\Theta}_-^{ab}\Pi_{+bi}, \quad {}^\bullet\Pi_+^{ab} = \frac{\kappa}{2}\tilde{\Theta}_-^{ab}. \tag{150}$$

The argument of all background fields, $[x^i, V^a(x^i, y_a)]$, depends nonlinearly on coordinates x^i, y_a through their doubles $\tilde{x}^i$, $\tilde{y}_a$ [see (39) and (40)]. All actions $S[x^i, y_a]$ are physically equivalent, but they are described with coordinates $x^i = \{x^{\mu_{d+1}}, \ldots, x^{\mu_D}\}$, for the untreated directions and dual coordinates $y_a = \{y_{\mu_1}, \ldots, y_{\mu_d}\}$, for the dualized directions. The case $d = D$ corresponds to the completely T-dual action with the T-dual fields $\frac{\kappa}{2}\Theta_-^{\mu\nu}\big(V(y)\big)$ and the case $d = 0$ to the initial action with the background $\Pi_{+\mu\nu}(x)$.

Applying the procedure to the T-dual action along dual directions $y_a = \{y_{\mu_1}, \ldots, y_{\mu_d}\}$ we obtained the initial theory, and applying it to the untreated directions $x^i = \{x^{\mu_{d+1}}, \ldots, x^{\mu_D}\}$ we obtained the completely T-dual theory. All these derivations confirmed that the set of all T-dualizations forms an Abelian group. The neutral element of the group is the unexecuted T-dualization, while the T-dualizations along some subset of original directions $\mathcal{T}^a$ is inverse to the T-dualizations along the set of the corresponding dual directions $\mathcal{T}_a$.

Funded by SCOAP[3].

Appendix A: The background field compositions

The background field compositions $\Pi_{\pm\mu\nu}$ of the initial theory are

$$\Pi_{\pm\mu\nu} = B_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}, \tag{A.1}$$

where $G_{\mu\nu}$ and $B_{\mu\nu}$ are the initial metric and the initial Kalb–Ramond field. The background field compositions $\Theta_\pm^{\mu\nu}$ of the T-dual theory are

$$\Theta_\pm^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}\Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}, \tag{A.2}$$

with $G_{E\mu\nu}$ being the effective metric

$$G_{E\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}, \tag{A.3}$$

and $\theta^{\mu\nu}$ being the parameter of non-commutativity

$$\theta^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}BG^{-1})^{\mu\nu}. \tag{A.4}$$

These background field compositions satisfy

$$\Pi_{\pm\mu\nu}\Theta_\mp^{\nu\rho} = \Theta_\pm^{\rho\nu}\Pi_{\mp\nu\mu} = \frac{1}{2\kappa}\delta_\mu^\rho. \tag{A.5}$$

Let us define the analogs of $\Theta_\pm^{\mu\nu}$ in the d- and $D-d$-dimensional subspaces determined by coordinates $x^a = \{x^{\mu_1}, \dots, x^{\mu_d}\}$ and $x^i = \{x^{\mu_{d+1}}, \dots, x^{\mu_D}\}$, where $d = 1, 2, \dots, D-1$. The effective metrics in these subspaces are defined by

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{Eab} &\equiv G_{ab} - 4B_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd}B_{db}, \\ \bar{G}_{Eij} &\equiv G_{ij} - 4B_{ik}(\bar{G}^{-1})^{kl}B_{lj}, \end{aligned} \tag{A.6}$$

where $\tilde{G}_{ab} \equiv G_{ab}$ and $\bar{G}_{ij} \equiv G_{ij}$. Using these we define the following field compositions:

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_\pm^{ab} &\equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ac}\Pi_{\pm cd}(\tilde{G}^{-1})^{db}, \\ \bar{\Theta}_\pm^{ij} &\equiv -\frac{2}{\kappa}(\bar{G}_E^{-1})^{ik}\Pi_{\pm kl}(\bar{G}^{-1})^{lj}, \end{aligned} \tag{A.7}$$

which are in fact the inverses of $2\kappa\Pi_{\mp ab}$ and $2\kappa\Pi_{\mp ij}$

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_\pm^{ab}\Pi_{\mp bc} &= \Pi_{\mp cb}\tilde{\Theta}_\pm^{ba} = \frac{1}{2\kappa}\delta_c^a, \\ \bar{\Theta}_\pm^{ij}\Pi_{\mp jk} &= \Pi_{\mp kj}\bar{\Theta}_\pm^{ji} = \frac{1}{2\kappa}\delta_k^i. \end{aligned} \tag{A.8}$$

Analogously as the fields theta $\Theta_\pm^{\mu\nu}$ defined in the whole space by (A.2), the theta fields defined in the subspaces can be separated into antisymmetric and symmetric parts as

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}_\pm^{ab} &= \tilde{\theta}^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ab}, \\ \bar{\Theta}_\pm^{ij} &= \bar{\theta}^{ij} \mp \frac{1}{\kappa}(\bar{G}_E^{-1})^{ij}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

where

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}^{ab} &\equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ac}B_{cd}(\tilde{G}^{-1})^{db}, \\ \bar{\theta}^{ij} &\equiv -\frac{2}{\kappa}(\bar{G}_E^{-1})^{ik}B_{kl}(\bar{G}^{-1})^{lj}. \end{aligned} \tag{A.10}$$

In the zeroth order the quantities $\Pi_{\pm\mu\nu}$, $\Theta_\pm^{\mu\nu}$, $\tilde{\Theta}_\pm^{ab}$, and $\bar{\Theta}_\pm^{ij}$ reduce to

$$\begin{aligned} \Pi_{0\pm\mu\nu} &= b_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}G_{\mu\nu}, \\ \Theta_{0\pm}^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\kappa}(g^{-1})^{\mu\rho}\Pi_{0\pm\rho\sigma}(G^{-1})^{\sigma\nu} = \theta_0^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(g^{-1})^{\mu\nu}, \\ \tilde{\Theta}_{0\pm}^{ab} &= -\frac{2}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ac}\,\Pi_{0\pm cd}(\tilde{G}^{-1})^{db} = \tilde{\theta}_0^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ab}, \\ \bar{\Theta}_{0\pm}^{ij} &= -\frac{2}{\kappa}(\bar{g}^{-1})^{ik}\,\Pi_{0\pm kl}(\bar{G}^{-1})^{lj} = \bar{\theta}_0^{ij} \mp \frac{1}{\kappa}(\bar{g}^{-1})^{ij}, \end{aligned} \tag{A.11}$$

where the zeroth order effective metrics are

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} - 4b_{\mu\rho}(G^{-1})^{\rho\sigma}b_{\sigma\nu}, \\ \tilde{g}_{ab} &= G_{ab} - 4b_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd}b_{db}, \\ \bar{g}_{ij} &= G_{ij} - 4b_{ik}(\bar{G}^{-1})^{kl}b_{lj}, \end{aligned} \tag{A.12}$$

and the zeroth order non-commutativity parameters are

$$\begin{aligned} \theta_0^{\mu\nu} &= -\frac{2}{\kappa}(g^{-1})^{\mu\rho}b_{\rho\sigma}(G^{-1})^{\sigma\nu}, \\ \tilde{\theta}_0^{ab} &= -\frac{2}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ac}\,b_{cd}(\tilde{G}^{-1})^{db} \\ \bar{\theta}_0^{ij} &= -\frac{2}{\kappa}(\bar{g}^{-1})^{ik}\,b_{kl}(\bar{G}^{-1})^{lj}. \end{aligned} \tag{A.13}$$

Quantities $\Pi_{0\pm\mu\nu}$, $\Theta^{\mu\nu}_{0\pm}$, $\tilde\Theta^{ab}_{0\pm}$, and $\bar\Theta^{ij}_{0\pm}$ satisfy

$$\Pi_{0\pm\mu\nu}\Theta^{\nu\rho}_{0\mp} = \Theta^{\rho\nu}_{0\pm}\Pi_{0\mp\nu\mu} = \frac{1}{2\kappa}\delta^\rho_\mu,$$
$$\Pi_{0\pm ab}\tilde\Theta^{bc}_{0\mp} = \tilde\Theta^{cb}_{0\pm}\Pi_{0\mp ba} = \frac{1}{2\kappa}\delta^c_a,$$
$$\Pi_{0\pm ij}\bar\Theta^{jk}_{0\mp} = \bar\Theta^{kj}_{0\pm}\Pi_{0\mp ji} = \frac{1}{2\kappa}\delta^k_i. \tag{A.14}$$

The non-commutativity parameters theta $\Theta^{\mu\nu}_\pm$, $\tilde\Theta^{ab}_\pm$, and $\bar\Theta^{ij}_\pm$ can be expressed as

$$\Theta^{\mu\nu}_\pm = \Theta^{\mu\nu}_{0\pm} - 2\kappa\Theta^{\mu\rho}_{0\pm}h_{\rho\sigma}\Theta^{\sigma\nu}_{0\pm},$$
$$\tilde\Theta^{ab}_\pm = \tilde\Theta^{ab}_{0\pm} - 2\kappa\tilde\Theta^{ac}_{0\pm}h_{cd}\tilde\Theta^{db}_{0\pm},$$
$$\bar\Theta^{ij}_\pm = \bar\Theta^{ij}_{0\pm} - 2\kappa\bar\Theta^{ik}_{0\pm}h_{kl}\bar\Theta^{lj}_{0\pm}. \tag{A.15}$$

Appendix A.1: Relations between field compositions

In Sect. 3.2 we introduced the background field composition

$$\overline\Pi_{\pm ij} \equiv \Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ia}\tilde\Theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bj}, \tag{A.16}$$

and analogously we define

$$\widetilde\Pi_{\pm ab} \equiv \Pi_{\pm ab} - 2\kappa\Pi_{\pm ai}\bar\Theta^{ij}_\mp\Pi_{\pm jb}. \tag{A.17}$$

Here we will show that these quantities are the inverses of the ordinary non-commutativity parameters theta, projected to the i- and a-subspaces [see (A.22)].

Let us express the tensors $\Pi_{\pm\mu\nu}$ and $\Theta^{\mu\nu}_\pm$, which satisfy (A.5), in a block-wise form as

$$\Pi_{\pm\mu\nu} = \begin{pmatrix}\Pi_{\pm ij} & \Pi_{\pm ib}\\ \Pi_{\pm aj} & \Pi_{\pm ab}\end{pmatrix},\quad \Theta^{\mu\nu}_\pm = \begin{pmatrix}\Theta^{ij}_\pm & \Theta^{ib}_\pm\\ \Theta^{aj}_\pm & \Theta^{ab}_\pm\end{pmatrix}. \tag{A.18}$$

We will use the definition of block-wise inversion, which states that the inverse of the matrix of the form

$$M = \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} \tag{A.19}$$

equals

$$M^{-1} = \begin{pmatrix}(A-BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}\\ -D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1}\end{pmatrix}. \tag{A.20}$$

Applying (A.20) to the first matrix in (A.18), Eq. (A.5) implies

$$2\kappa\Theta^{ij}_\mp = \left(\Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ia}\tilde\Theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bj}\right)^{-1},$$
$$2\kappa\Theta^{ib}_\mp = -2\kappa\bar\Theta^{ij}_\mp\Pi_{\pm ja}(\Pi_{\pm ab} - 2\kappa\Pi_{\pm ak}\bar\Theta^{kl}_\mp\Pi_{\pm lb})^{-1},$$
$$2\kappa\Theta^{aj}_\mp = -2\kappa\tilde\Theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bi}(\Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ic}\tilde\Theta^{cd}_\mp\Pi_{\pm dj})^{-1},$$
$$2\kappa\Theta^{ab}_\mp = (\Pi_{\pm ab} - 2\kappa\Pi_{\pm ai}\bar\Theta^{ij}_\mp\Pi_{\pm jb})^{-1}, \tag{A.21}$$

and we can conclude that (A.16) and (A.17) are the inverses of $2\kappa\Theta^{ij}_\mp$ and $2\kappa\Theta^{ab}_\mp$, respectively. So, we can write

$$\overline\Pi_{\pm ij}\Theta^{jk}_\mp = \Theta^{kj}_\mp\overline\Pi_{\pm ji} = \frac{1}{2\kappa}\delta^k_i,$$
$$\widetilde\Pi_{\pm ab}\Theta^{bc}_\mp = \Theta^{cb}_\mp\widetilde\Pi_{\pm ba} = \frac{1}{2\kappa}\delta^c_a, \tag{A.22}$$

and

$$\Theta^{ib}_\mp = -2\kappa\bar\Theta^{ij}_\mp\Pi_{\pm ja}\Theta^{ab}_\mp,$$
$$\Theta^{aj}_\mp = -2\kappa\tilde\Theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bi}\Theta^{ij}_\mp. \tag{A.23}$$

Applying (A.20) to the second matrix in (A.18), Eq. (A.5) implies

$$2\kappa\Pi_{\mp ij} = (\Theta^{ij}_\pm - 2\kappa\Theta^{ia}_\pm\widetilde\Pi_{ab\mp}\Theta^{bj}_\pm)^{-1},$$
$$2\kappa\Pi_{\mp ib} = -2\kappa\overline\Pi_{\mp ij}\Theta^{ja}_\pm(\Theta^{ab}_\pm - 2\kappa\Theta^{ak}_\pm\overline\Pi_{\mp kl}\Theta^{lb}_\pm)^{-1},$$
$$2\kappa\Pi_{\mp aj} = -2\kappa\widetilde\Pi_{ab\mp}\Theta^{bi}_\pm(\Theta^{ij}_\pm - 2\kappa\Theta^{ic}_\pm\widetilde\Pi_{\mp cd}\Theta^{dj}_\pm)^{-1},$$
$$2\kappa\Pi_{\mp ab} = (\Theta^{ab}_\pm - 2\kappa\Theta^{ai}_\pm\overline\Pi_{\mp ij}\Theta^{jb}_\pm)^{-1}, \tag{A.24}$$

so using (A.8) we conclude that

$$\bar\Theta^{ij}_\pm = \Theta^{ij}_\pm - 2\kappa\Theta^{ia}_\pm\widetilde\Pi_{ab\mp}\Theta^{bj}_\pm,$$
$$\tilde\Theta^{ab}_\pm = \Theta^{ab}_\pm - 2\kappa\Theta^{ai}_\pm\overline\Pi_{\mp ij}\Theta^{jb}_\pm, \tag{A.25}$$

and

$$\Pi_{\mp ib} = -2\kappa\overline\Pi_{\mp ij}\Theta^{ja}_\pm\Pi_{\mp ab},$$
$$\Pi_{\mp aj} = -2\kappa\widetilde\Pi_{\mp ab}\Theta^{bi}_\pm\Pi_{\mp ij}. \tag{A.26}$$

Let us derive some useful relations between these quantities. Equation (A.5), for $\mu = a$, $\nu = i$ and $\mu = i$, $\nu = a$, becomes

$$\Pi_{\pm ab}\Theta^{bi}_\mp = -\Pi_{\pm aj}\Theta^{ji}_\mp,$$
$$\Pi_{\pm ij}\Theta^{ja}_\mp = -\Pi_{\pm ib}\Theta^{ba}_\mp, \tag{A.27}$$

while taking $\mu = a$, $\nu = b$ and $\mu = i$, $\nu = j$ we obtain

$$\Pi_{\pm ac}\Theta^{cb}_\mp + \Pi_{\pm ai}\Theta^{ib}_\mp = \frac{1}{2\kappa}\delta^b_a,$$
$$\Pi_{\pm ia}\Theta^{aj}_\mp + \Pi_{\pm ik}\Theta^{kj}_\mp = \frac{1}{2\kappa}\delta^j_i. \tag{A.28}$$

Multiplying Eq. (A.27) from the left with $\tilde\Theta^{ca}_\mp$ and from the right with $\overline\Pi_{\mp ik}$ we get the relation

$$\Theta^{ci}_\mp\overline\Pi_{\pm ik} = -\tilde\Theta^{ca}_\mp\Pi_{\pm ak}, \tag{A.29}$$

while multiplying Eq. (A.28) from the right with $\bar\Theta^{ki}_\mp$ and from the left with $\tilde\Pi_{\pm ac}$, we obtain

$$\Theta^{ka}_\mp\widetilde\Pi_{\pm ac} = -\bar\Theta^{ki}_\mp\Pi_{\pm ic}. \tag{A.30}$$

References

1. A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, Phys. Rep. **244**, 77–202 (1994)
2. E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, Y. Lozano, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41**, 1 (1995)
3. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, 2nd edn. (Cambridge University Press, 2009)
4. K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, *String Theory and M-Theory—A Modern Introdution* (Cambridge University Press, 2007)
5. T.H. Buscher, Phys. Lett. B **201**(4), 466 (1988)
6. M. Roček, E. Verlinde, Nucl. Phys. B **373**, 630 (1992)
7. J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, JHEP **10**, 085 (2005)
8. R. Blumenhagen, A. Deser, D. Lüst, E. Plauschinn, F. Rennecke, J. Phys. A **44**, 385401 (2011)
9. B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Rev. D **84**, 065012 (2011)
10. B. Nikolić, B. Sazdović, JHEP **06**, 101 (2012)
11. O. Hohm, Prog. Theor. Phys. Suppl. **188**, 116–125 (2011)
12. C. Hull, B. Zwiebach, JHEP **09**, 099 (2009)
13. O. Hohm, C. Hull, B. Zwiebach, JHEP **08**, 008 (2010)
14. O. Hohm, C. Hull, B. Zwiebach, JHEP **07**, 016 (2010)
15. D. Lüst, JHEP **12**, 084 (2010)
16. D. Andriot, M. Larfors, D. Lüst, P. Patalong, JHEP **06**, 021 (2013)
17. D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Lüst, P. Patalong, Phys. Rev. Lett. **108**, 261602 (2012)
18. Lj. Davidović, B. Sazdović, EPJC **74**(1), 2683 (2014)
19. Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, EPJC **74**(1), 2734 (2014)
20. A. Giveon, E. Rabinovici, G. Veneciano, Nucl. Phys. B **323**, 167 (1989)
21. Lj. Davidović, B. Sazdović, Phys. Rev. D **83**, 066014 (2011)
22. Lj. Davidović, B. Sazdović, JHEP **08**, 112 (2011)
23. Lj. Davidović, B. Sazdović, EPJC **72**(11), 2199 (2012)
24. N. Seiberg, E. Witten, JHEP **09**, 032 (1999)
25. B. Nikolić, B. Sazdović, Nucl. Phys. B **836**, 100 (2010)
26. B. Sazdović, JHEP **08**, 055 (2015)
27. R. Blumenhagen, E. Plauschinn, J. Phys. A Math. Theor. **44**, 015401 (2011)

Eur. Phys. J. C (2017) 77:197
DOI 10.1140/epjc/s10052-017-4758-0

THE EUROPEAN PHYSICAL JOURNAL C

Regular Article - Theoretical Physics

T-dualization of type II superstring theory in double space

B. Nikolić[a], **B. Sazdović**[b]

Institute of Physics Belgrade, University of Belgrade, Pregrevica 118, Belgrade, Serbia

Received: 12 October 2016 / Accepted: 14 March 2017 / Published online: 27 March 2017

Abstract In this article we offer a new interpretation of the T-dualization procedure of type II superstring theory in the double space framework. We use the ghost free action of type II superstring in pure spinor formulation in approximation of constant background fields up to the quadratic terms. T-dualization along any subset of the initial coordinates, x^a, is equivalent to the permutation of this subset with subset of the corresponding T-dual coordinates, y_a, in double space coordinate $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$. Requiring that the T-dual transformation law after the exchange $x^a \leftrightarrow y_a$ has the same form as the initial one, we obtain the T-dual NS–NS and NS–R background fields. The T-dual R–R field strength is determined up to one arbitrary constant under some assumptions. The compatibility between supersymmetry and T-duality produces a change of bar spinors and R–R field strength. If we dualize an odd number of dimensions x^a, such a change flips type IIA/B to type II B/A. If we T-dualize the time-like direction, one imaginary unit i maps type II superstring theories to type II* ones.

1 Introduction

T-duality is a fundamental feature of string theory [1–8]. As a consequence of T-duality there is no physical difference between string theory compactified on a circle of radius R and circle of radius $1/R$. This conclusion can be generalized to tori of various dimensions.

The mathematical realization of T-duality is given by Buscher T-dualization procedure [4,5]. If the background fields have global isometries along some directions then we can localize that symmetry introducing gauge fields. The next step is to add the new term in the action with Lagrange multipliers which forces these gauge fields to be unphysical. Finally, we can use gauge freedom to fix initial coordinates. Varying this gauge fixed action with respect to the Lagrange multipliers one gets the initial action and varying with respect to the gauge fields one gets the T-dual action.

Buscher T-dualization can be applied along directions on which background fields do not depend [4–10]. Such a procedure was used in Refs. [11–18] in the context of closed string noncommutativity. There is a generalized Buscher procedure which deals with background fields depending on all coordinates. The generalized procedure was applied to the case of bosonic string moving in the weakly curved background [19,20]. It leads directly to closed string noncommutativity [21].

The Buscher procedure can be considered as the definition of T-dualization. But there are also other frameworks in which we can represent T-dualization which must be in accordance with the Buscher procedure. Here we talk about the double space formalism which was the subject of the articles about 20 years ago [22–26]. Double space is spanned by coordinates $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, D-1)$, where x^μ and y_μ are the coordinates of the D-dimensional initial and T-dual space-time, respectively. Interest for this subject emerged again with Refs. [27–34], where T-duality is related with $O(d, d)$ transformations. The approach of Ref. [22] has been recently improved when the T-dualization along some subset of the initial and corresponding subset of the T-dual coordinates has been interpreted as permutation of these subsets in the double space coordinates [35,36].

Let us motivate our interest in this subject. It is well known that T-duality is important feature in understanding M-theory. In fact, five consistent superstring theories are connected by a web of T and S dualities. In the beginning we are going to pay attention to the T-duality. To obtain formulation of M-theory it is not enough to find all corresponding T-dual theories. We must construct one theory which contains the initial theory and all corresponding T-dual ones.

This work is supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.

[a] e-mail: bnikolic@ipb.ac.rs
[b] e-mail: sazdovic@ipb.ac.rs

We have succeeded to realize such program in the bosonic case, for both constant and weakly curved background. In Refs. [35,36] we doubled all bosonic coordinates and obtain the theory which contains the initial and all corresponding T-dual theories. In such theory T-dualization along an arbitrary set of coordinates x^a is equivalent to replacement of these coordinates with the corresponding T-dual ones, y_a. Therefore, T-duality in double space becomes symmetry transformation with respect to permutation group.

Performing T-duality in supersymmetric case generates new problems. In the present paper we are going to extend such an approach to the type II theories. In fact, doubling all bosonic coordinates we have unified types IIA, IIB as well as type II* [37] (obtained by T-dualization along time-like direction) theories. We expect that such a program could be a step toward better understanding M-theory.

In the present article we apply the approach of Refs. [35,36] in the cases of complete (along all bosonic coordinates) and partial (subset of the bosonic coordinates) T-dualization of the type II superstring theory [1–3]. We use ghost free type II superstring theory in pure spinor formulation [33,38–44] in the approximation of constant background fields and up to the quadratic terms. This action is obtained from the general type II superstring action [45] which is given in the form of an expansion in powers of fermionic coordinates θ^α and $\bar\theta^\alpha$. In the first step of our consideration we will limit our analysis to the basic term of the action neglecting θ^α and $\bar\theta^\alpha$ dependent terms. Later, in the discussion of proper fermionic variables, using an iterative procedure [45], we take into consideration higher power terms and restore the supersymmetric invariants $\Pi^\mu_\pm$, d_α and $\bar d_\alpha$ as variables in the theory.

Rewriting the T-dual transformation laws in terms of the double space coordinates Z^M we introduce the generalized metric $\mathcal{H}_{MN}$ and the generalized current $J_{\pm M}$. The permutation matrix $(\mathcal{T}^a)^M{}_N$ exchanges the places of x^a and y_a, where the index a marks the directions along which we make T-dualization. The basic request is that T-dual double space coordinates, ${}_aZ^M = (\mathcal{T}^a)^M{}_N Z^N$, satisfy the transformation law of the same form as initial coordinates, Z^M. It produces the expressions for the T-dual generalized metric, ${}_a\mathcal{H}_{MN} = (\mathcal{T}^a\mathcal{H}\mathcal{T}^a)_{MN}$, and the T-dual current, ${}_aJ_{\pm M} = (\mathcal{T}^a J_\pm)_M$. This is equivalent to the requirement that transformations of the coordinates and background fields, $Z^M \to {}_aZ^M$, $\mathcal{H}_{MN} \to {}_a\mathcal{H}_{MN}$ and $J_{\pm M} \to {}_aJ_{\pm M}$, are symmetry transformations of the double space action. From transformation of the generalized metric we obtain T-dual NS–NS background fields and from transformation of the current we obtain T-dual NS–R fields.

The supersymmetry case includes the new features in both the Buscher and the double space T-duality approaches. In the bosonic case the left and right world-sheet chiralities have different T-duality transformations. It implies that in T-dual theory two fermionic coordinates, θ^α and $\bar\theta^\alpha$, and corresponding canonically conjugated momenta, π_α and $\bar\pi_\alpha$ (with different world-sheet chiralities), have different supersymmetry transformations. As shown in [46,47] it is possible to make a supersymmetry transformation in T-dual theory unique if we change one world-sheet chirality sector. Therefore, compatibility between supersymmetry and T-duality can be achieved by action on the bar variables with the operator ${}_a\Omega$, ${}^\bullet\bar\pi_\alpha = {}_a\Omega_\alpha{}^\beta\, {}_a\bar\pi_\beta$. As a consequence of the relation $\Gamma^{11}\,{}_a\Omega = (-1)^d\,{}_a\Omega\Gamma^{11}$ it follows that such transformations for odd d change space-time chiralities of the bar spinors. In such a way the operator ${}_a\Omega$ for odd d maps type IIA/B to type IIB/A theory. Here d denotes the number of T-dualized directions.

There is one difference compared with the bosonic string case [35,36] where all results from the Buscher procedure were reproduced. In the T-dual transformation laws of type II superstring theory the R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ does not appear. The reason is that R–R field strength couples only with the fermionic degrees of freedom, which are not dualized. This is in analogy with the term $\partial_+ x^i \Pi_{+ij}\partial_- x^j$ in the bosonic case, where background field Π_{+ij} couples only with coordinates x^i, which are undualized [27–29]. To reproduce the Buscher form of the T-dual R–R field strength we should make some additional assumptions.

There is an appendix, which contains the block-wise expressions for the tensors used in this article and useful relations.

2 Buscher T-dualization of type II superstring theory

In this section we will consider type II superstring action in pure spinor formulation [38,43,44] in the approximation of constant background fields and up to the quadratic terms. Then we will give the overview of the results obtained by Buscher T-dualization procedure [9,10,46,47].

2.1 Type II superstring in pure spinor formulation

The sigma model action for the type II superstring of Ref. [45] is of the form

$$S = \int_\Sigma d^2\xi\, (X^T)^M A_{MN} \bar X^N + S_\lambda + S_{\bar\lambda}, \tag{2.1}$$

where the vectors X^M and $\bar X^N$ are left and right chiral supersymmetric variables,

$$X^M = \begin{pmatrix} \partial_+\theta^\alpha \\ \Pi^\mu_+ \\ d_\alpha \\ \frac{1}{2}N^{\mu\nu}_+ \end{pmatrix}, \quad \bar X^N = \begin{pmatrix} \partial_-\bar\theta^\alpha \\ \Pi^\mu_- \\ \bar d_\alpha \\ \frac{1}{2}\bar N^{\mu\nu}_- \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

of which the components are defined as

$$\Pi_+^\mu = \partial_+ x^\mu + \frac{1}{2}\theta^\alpha (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_+\theta^\beta,$$
$$\Pi_-^\mu = \partial_- x^\mu + \frac{1}{2}\bar\theta^\alpha (\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_-\bar\theta^\beta, \tag{2.3}$$

$$d_\alpha = \pi_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\theta)_\alpha\left[\partial_+ x^\mu + \frac{1}{4}(\theta\Gamma_\mu\partial_+\theta)\right],$$
$$\bar d_\alpha = \bar\pi_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\bar\theta)_\alpha\left[\partial_- x^\mu + \frac{1}{4}(\bar\theta\Gamma_\mu\partial_-\bar\theta)\right], \tag{2.4}$$

$$N_+^{\mu\nu} = \frac{1}{2}w_\alpha(\Gamma^{[\mu\nu]})^\alpha{}_\beta\lambda^\beta, \quad \bar N_-^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar w_\alpha(\Gamma^{[\mu\nu]})^\alpha{}_\beta\bar\lambda^\beta. \tag{2.5}$$

Inserting the supermatrix A_{MN}

$$A_{MN} = \begin{pmatrix} A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\nu} & E_\alpha{}^\beta & \Omega_{\alpha,\mu\nu} \\ A_{\mu\beta} & A_{\mu\nu} & \bar E_\mu^\beta & \Omega_{\mu,\nu\rho} \\ E^\alpha{}_\beta & E^\alpha_\nu & \mathrm{P}^{\alpha\beta} & C^\alpha{}_{\mu\nu} \\ \Omega_{\mu\nu,\beta} & \Omega_{\mu\nu,\rho} & \bar C_{\mu\nu}{}^\beta & S_{\mu\nu,\rho\sigma} \end{pmatrix}, \tag{2.6}$$

in (2.1), the action gets the expanded form [45]

$$\begin{aligned} S = \int d^2\xi \Big[&\partial_+\theta^\alpha A_{\alpha\beta}\partial_-\bar\theta^\beta + \partial_+\theta^\alpha A_{\alpha\mu}\Pi_-^\mu + \Pi_+^\mu A_{\mu\alpha}\partial_-\bar\theta^\alpha \\ &+ \Pi_+^\mu A_{\mu\nu}\Pi_-^\nu + d_\alpha E^\alpha{}_\beta\partial_-\bar\theta^\beta + d_\alpha E^\alpha{}_\mu\Pi_-^\mu \\ &+ \partial_+\theta^\alpha E_\alpha{}^\beta\bar d_\beta + \Pi_+^\mu E_\mu{}^\beta\bar d_\beta + d_\alpha \mathrm{P}^{\alpha\beta}\bar d_\beta \\ &+ \frac{1}{2}N_+^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu,\beta}\partial_-\bar\theta^\beta + \frac{1}{2}N_+^{\mu\nu}\Omega_{\mu\nu,\rho}\Pi_-^\rho \\ &+ \frac{1}{2}\partial_+\theta^\alpha\Omega_{\alpha,\mu\nu}\bar N_-^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\Pi_+^\mu\Omega_{\mu,\nu\rho}\bar N_-^{\nu\rho} \\ &+ \frac{1}{2}N_+^{\mu\nu}\bar C_{\mu\nu}{}^\beta\bar d_\beta + \frac{1}{2}d_\alpha C^\alpha{}_{\mu\nu}\bar N_-^{\mu\nu} \\ &+ \frac{1}{4}N_+^{\mu\nu}S_{\mu\nu,\rho\sigma}\bar N_-^{\rho\sigma}\Big] + S_\lambda + S_{\bar\lambda}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

The world sheet Σ is parameterized by $\xi^m = (\xi^0 = \tau, \xi^1 = \sigma)$ and $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$. Superspace is spanned by bosonic coordinates, x^μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots, 9$), and fermionic ones, θ^α and $\bar\theta^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, 16$). The variables π_α and $\bar\pi_\alpha$ are canonically conjugated momenta to θ^α and $\bar\theta^\alpha$, respectively. The actions for pure spinors, S_λ and $S_{\bar\lambda}$, are free field actions

$$S_\lambda = \int d^2\xi\, w_\alpha\partial_-\lambda^\alpha, \quad S_{\bar\lambda} = \int d^2\xi\, \bar w_\alpha\partial_+\bar\lambda^\alpha, \tag{2.8}$$

where λ^α and $\bar\lambda^\alpha$ are pure spinors and w_α and $\bar w_\alpha$ are their canonically conjugated momenta, respectively. The pure spinors satisfy the so-called pure spinor constraints,

$$\lambda^\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\lambda^\beta = \bar\lambda^\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar\lambda^\beta = 0. \tag{2.9}$$

The matrix A_{MN} containing type II superfields generally depends on x^μ, θ^α and $\bar\theta^\alpha$. The superfields $A_{\mu\nu}$, $\bar E_\mu{}^\alpha$, $E^\alpha{}_\mu$ and $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ are physical superfields, because their first components are supergravity fields. The fields in the first column and first row are auxiliary superfields because they can be expressed in terms of the physical ones [45]. The remaining ones, $\Omega_{\mu,\nu\rho}(\Omega_{\mu\nu,\rho})$, $C^\alpha{}_{\mu\nu}(\bar C_{\mu\nu}{}^\alpha)$ and $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$, are the curvatures (field strengths) for the physical superfields.

The action from which we start (2.7) could be considered as an expansion in powers of θ^α and $\bar\theta^\alpha$. In the iterative procedure presented in [45] it has been shown that each component in the expansion can be obtained from the previous one. Therefore, for practical reasons (computational simplicity), in the first step we limit our considerations to the basic component i.e. we neglect all terms in the action containing θ^α and $\bar\theta^\alpha$. As a consequence the θ^α and $\bar\theta^\alpha$ terms disappear from $\Pi_\pm^\mu$, d_α and $\bar d_\alpha$ and in the solutions for the physical superfields just x-dependent supergravity fields survive. Therefore we lose explicit supersymmetry in such approximation. Later, when we discuss proper fermionic variables, we would go further in the expansion and take higher power terms, which means that supersymmetric invariants, $\Pi_\pm^\mu$, d_α and $\bar d_\alpha$, would play the roles of $\partial_\pm x^\mu$, π_α and $\bar\pi_\alpha$, respectively.

We are going to perform T-dualization along some subset of bosonic coordinates x^a. Therefore, we will assume that these directions are Killing vectors. Since $\partial_\pm x^a$ appears in $\Pi_\pm^\mu$, d_α and $\bar d_\alpha$, it essentially means that corresponding superfields (A_{ab}, $\bar E_a{}^\alpha$, $E^\alpha{}_a$, $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$) should not depend on x^a. This assumption regarding Killing spinors could be extended on all space-time directions x^μ, which effectively means, in the first step, that physical superfields are constant. All auxiliary superfields can be expressed in terms of space-time derivatives of physical supergravity fields [45]. Then, in the first step, the auxiliary superfields are zero, because all physical superfields are constant. On the other hand, having constant physical superfields means that their field strengths, $\Omega_{\mu,\nu\rho}(\Omega_{\mu\nu,\rho})$, $C^\alpha{}_{\mu\nu}(\bar C_{\mu\nu}{}^\alpha)$ and $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$, are zero. In this way, in the first step, we eliminated from the action terms containing variables $N_+^{\mu\nu}$ and $\bar N_-^{\mu\nu}$ (2.5).

This choice of background fields should be discussed from the viewpoint of space-time field equations of type II superstring action [48]. Let us pay attention on the space-time field equations for type II superstring given in Appendix B of [48]. Equation (B.7) from this set of equations represents the back-reaction of $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ on the metric $G_{\mu\nu}$. If we take a constant dilaton Φ and a constant antisymmetric NS–NS field $B_{\mu\nu}$ we obtain

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}G_{\mu\nu}R \sim (\mathrm{P}^{\alpha\beta})^2_{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

If we choose the background field $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ to be constant, in general, we will have a constant Ricci tensor, which means that the metric tensor is a quadratic function of the space-time coordinates i.e. there is back-reaction of R–R field strength on the metric tensor. If one wants to cancel non-quadratic terms originating from back-reaction, additional conditions must be imposed on the R–R field strength—the $AdS_5 \times S_5$ coset geometry or self-duality condition (see Ref. [38]).

Taking into account the above analysis and arguments, our approximation can be realized in the following way:

$$\Pi^{\mu}_{\pm} \to \partial_{\pm} x^{\mu}, \quad d_{\alpha} \to \pi_{\alpha}, \quad \bar{d}_{\alpha} \to \bar{\pi}_{\alpha}, \tag{2.11}$$

and the physical superfields take the form

$$A_{\mu\nu} = \kappa \left(\frac{1}{2} G_{\mu\nu} + B_{\mu\nu} \right), \quad E^{\alpha}_{\nu} = -\Psi^{\alpha}_{\nu}, \quad \bar{E}^{\alpha}_{\mu} = \bar{\Psi}^{\alpha}_{\mu},$$
$$\mathrm{P}^{\alpha\beta} = \frac{2}{\kappa} P^{\alpha\beta} = \frac{2}{\kappa} e^{\frac{\Phi}{2}} F^{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

where $G_{\mu\nu}$ is the metric tensor and $B_{\mu\nu}$ is the antisymmetric NS–NS background field. Consequently, the full action S is

$$S = \kappa \int_{\Sigma} d^2\xi \left[\partial_{+} x^{\mu} \Pi_{+\mu\nu} \partial_{-} x^{\nu} + \frac{1}{4\pi\kappa} \Phi R^{(2)} \right.$$
$$+ \int_{\Sigma} d^2\xi \left[-\pi_{\alpha} \partial_{-} (\theta^{\alpha} + \Psi^{\alpha}_{\mu} x^{\mu}) + \partial_{+} (\bar{\theta}^{\alpha} + \bar{\Psi}^{\alpha}_{\mu} x^{\mu}) \bar{\pi}_{\alpha} \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\kappa} \pi_{\alpha} P^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{\beta} \right], \tag{2.13}$$

where

$$\Pi_{\pm\mu\nu} = B_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}. \tag{2.14}$$

The actions S_{λ} and $S_{\bar{\lambda}}$ are decoupled from the rest and can be neglected in the further analysis. The action, in its final form, is ghost independent.

The NS–NS sector of the theory described by (2.13) contains the gravitational $G_{\mu\nu}$, the antisymmetric Kalb–Ramond field $B_{\mu\nu}$ and the dilaton field Φ. In the NS–R sector there are two gravitino fields, Ψ^{α}_{μ} and $\bar{\Psi}^{\alpha}_{\mu}$, which are Majorana–Weyl spinors of the opposite chirality in type IIA and of the same chirality in type IIB theory. The field $F^{\alpha\beta}$ is the R–R field strength and can be expressed in terms of the antisymmetric tensors $F_{(k)}$ [9,49–51]

$$F^{\alpha\beta} = \sum_{k=0}^{D} \frac{1}{k!} F_{(k)} \Gamma^{\alpha\beta}_{(k)}, \quad \left[\Gamma^{\alpha\beta}_{(k)} = (\Gamma^{[\mu_1 \cdots \mu_k]})^{\alpha\beta} \right] \tag{2.15}$$

where

$$\Gamma^{[\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_k]} \equiv \Gamma^{[\mu_1} \Gamma^{\mu_2} \ldots \Gamma^{\mu_k]} \tag{2.16}$$

is the completely antisymmetrized product of gamma matrices. The bispinor $F^{\alpha\beta}$ satisfies the chirality condition, $\Gamma^{11} F = \pm F \Gamma^{11}$, where Γ^{11} is a product of gamma matrices in $D = 10$ dimensional space-time and the sign $+$ corresponds to type IIA, while the sign $-$ corresponds to type IIB superstring theory. Consequently, type IIA theory contains only even rank tensors $F_{(k)}$, while type IIB contains only odd rank tensors. Because of the duality relation, the independent tensors are $F_{(0)}$, $F_{(2)}$ and $F_{(4)}$ for type IIA, while $F_{(1)}$, $F_{(3)}$ and the self-dual part of $F_{(5)}$ for type IIB superstring theory. Using the mass-shell condition (massless Dirac equation for $F^{\alpha\beta}$) these tensors can be solved in terms of the potentials $F_{(k)} = dA_{(k-1)}$. The factor $e^{\frac{\Phi}{2}}$ is in accordance with the conventions adopted from [52].

2.2 T-dualization along arbitrary number of coordinates

Let us start with the action (2.13) and apply the standard T-dualization procedure [4,5,19,20]. It means that we localize the shift symmetry for some coordinates x^a. We substitute the ordinary derivatives with covariant ones, introducing gauge fields v^a_{α}. Then we add the term $\frac{1}{2} y_a F^a_{+-}$ to the Lagrangian in order to force the field strength F^a_{+-} to vanish and preserve equivalence between original and T-dual theories. Finally, we fix the gauge $x^a = 0$ and obtain

$$S_{\text{fix}}(v^a_{\pm}, x^i, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}^{\alpha}, \pi_{\alpha}, \bar{\pi}_{\alpha})$$
$$= \int_{\Sigma} d^2\xi \left[\kappa v^a_{+} \Pi_{+ab} v^b_{-} + \kappa v^a_{+} \Pi_{+aj} \partial_{-} x^j + \kappa \partial_{+} x^i \Pi_{+ib} v^b_{-} \right.$$
$$+ \kappa \partial_{+} x^i \Pi_{+ij} \partial_{-} x^j + \frac{1}{4\pi} \Phi R^{(2)} - \pi_{\alpha} \Psi^{\alpha}_{b} v^b_{-}$$
$$+ v^a_{+} \bar{\Psi}^{\alpha}_{a} \bar{\pi}_{\alpha} - \pi_{\alpha} \partial_{-} (\theta^{\alpha} + \Psi^{\alpha}_{i} x^i) + \partial_{+} (\bar{\theta}^{\alpha} + \bar{\Psi}^{\alpha}_{i} x^i) \bar{\pi}_{\alpha}$$
$$\left. + \frac{1}{2\kappa} e^{\frac{\Phi}{2}} \pi_{\alpha} F^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{\beta} + \frac{\kappa}{2} (v^a_{+} \partial_{-} y_a - v^a_{-} \partial_{+} y_a) \right]. \tag{2.17}$$

Varying the gauge fixed action with respect to the Lagrange multipliers y_a we get the solution for the gauge fields in the form

$$v^a_{\pm} = \partial_{\pm} x^a, \tag{2.18}$$

while varying with respect to the gauge fields $v^a_{\pm}$ we have

$$v^a_{\pm} = -2\kappa \hat{\theta}^{ab}_{\pm} \Pi_{\mp bi} \partial_{\pm} x^i - \kappa \hat{\theta}^{ab}_{\pm} \partial_{\pm} y_b \pm 2 \hat{\theta}^{ab}_{\pm} \Psi^{\alpha}_{\pm b} \pi_{\pm\alpha}. \tag{2.19}$$

Substituting $v^a_{\pm}$ in (2.17) we find

$$S_{\text{fix}}(y_a, x^i, \theta^{\alpha}, \bar{\theta}^{\alpha}, \pi_{\alpha}, \bar{\pi}_{\alpha})$$
$$= \int_{\Sigma} d^2\xi \left[\frac{\kappa^2}{2} \partial_{+} y_a \hat{\theta}^{ab}_{-} \partial_{-} y_b + \kappa^2 \partial_{+} y_a \hat{\theta}^{ab}_{-} \Pi_{+bj} \partial_{-} x^j \right.$$
$$- \kappa^2 \partial_{+} x^i \Pi_{+ia} \hat{\theta}^{ab}_{-} \partial_{-} y_b + \frac{1}{4\pi} \Phi R^{(2)}$$
$$+ \kappa \partial_{+} x^i (\Pi_{+ij} - 2\kappa \Pi_{+ia} \hat{\theta}^{ab}_{-} \Pi_{+bj}) \partial_{-} x^j$$
$$- \pi_{\alpha} \partial_{-} (\theta^{\alpha} + \Psi^{\alpha}_{i} x^i - 2 \Psi^{\alpha}_{a} \hat{\theta}^{ab}_{-} \Pi_{+bj} x^j - \Psi^{\alpha}_{a} \hat{\theta}^{ab}_{-} y_b)$$
$$+ \partial_{+} (\bar{\theta}^{\alpha} + \bar{\Psi}^{\alpha}_{i} x^i + 2 \bar{\Psi}^{\alpha}_{a} \hat{\theta}^{ab}_{+} \Pi_{-bj} x^j + \bar{\Psi}^{\alpha}_{a} \hat{\theta}^{ab}_{+} y_b) \bar{\pi}_{\alpha}$$
$$\left. + 2 \pi_{\alpha} \Psi^{\alpha}_{a} \hat{\theta}^{ab}_{-} \bar{\Psi}^{\beta}_{b} \bar{\pi}_{\beta} + \frac{1}{2\kappa} e^{\frac{\Phi}{2}} \pi_{\alpha} F^{\alpha\beta} \bar{\pi}_{\beta} \right]. \tag{2.20}$$

Before we read the T-dual background fields, we must express this action in terms of the appropriate spinor coordinates, which we will discuss in the next subsections.

Combining two solutions for the gauge fields (2.18) and (2.19) we obtain the transformation law between initial x^a

and T-dual coordinates y_a,

$$\partial_\pm x^a \cong -2\kappa\hat{\theta}^{ab}_\pm \Pi_{\mp bi}\partial_\pm x^i - \kappa\hat{\theta}^{ab}_\pm(\partial_\pm y_b - J_{\pm b}). \tag{2.21}$$

Its inverse is the solution of the last equation in terms of y_a

$$\partial_\pm y_a \cong -2\Pi_{\mp ab}\partial_\pm x^b - 2\Pi_{\mp ai}\partial_\pm x^i + J_{\pm a}, \tag{2.22}$$

where we use $\cong$ to emphasize that these are T-duality relations. Here we introduced the current $J_{\pm\mu}$ in the form

$$J_{\pm\mu} = \pm\frac{2}{\kappa}\Psi^\alpha_{\pm\mu}\pi_{\pm\alpha}, \tag{2.23}$$

where

$$\Psi^\alpha_{+\mu} \equiv \Psi^\alpha_\mu, \quad \Psi^\alpha_{-\mu} \equiv \bar{\Psi}^\alpha_\mu, \quad \pi_{+\alpha} \equiv \pi_\alpha, \quad \pi_{-\alpha} \equiv \bar{\pi}_\alpha, \tag{2.24}$$

and the expression $\hat{\theta}^{ab}_\pm$ is defined in (A.9).

2.3 Relation between left and right chirality in T-dual theory

One can see from (2.21) and (2.22) that the left and right chiralities transform differently in T-dual theory. As a consequence, in T-dual theory we will have two types of vielbeins, two types of Γ-matrices, two types of spin connections and two types of supersymmetry transformations. We want to have a single geometry in T-dual theory. Therefore, we will show that all these different representations of the same variables can be connected by Lorentz transformations [46,47].

2.3.1 Two sets of vielbeins in T-dual theory

The T-dual transformations of the coordinates (2.22) can be put in the form

$$\begin{pmatrix} \partial_\pm y_a \\ \partial_\pm x^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\Pi_{\mp ab} & -2\Pi_{\mp aj} \\ 0 & \delta^i_j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_\pm x^b \\ \partial_\pm x^j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_{\pm a} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.25}$$

which can be rewritten as

$$\begin{aligned} \partial_+({}_aX)_{\hat{\mu}} &= (\bar{Q}^{-1T})_{\hat{\mu}\nu}\partial_+ x^\nu + J_{+\hat{\mu}}, \\ \partial_-({}_aX)_{\hat{\mu}} &= (Q^{-1T})_{\hat{\mu}\nu}\partial_- x^\nu + J_{-\hat{\mu}}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

where we introduced the T-dual variables ${}_aX_{\hat{\mu}} = \{y_a, x^i\}$. Here and further on the left subscript a denotes the T-dualization along x^a directions. For coordinates which contain both x^i and y_a we will use "hat" indices $\hat{\mu}, \hat{\nu}$. The matrices

$$Q^{\hat{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} \kappa\hat{\theta}^{ab}_+ & 0 \\ -2\kappa\Pi_{-ic}\hat{\theta}^{cb}_+ & \delta^i_j \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^{\hat{\mu}\nu} = \begin{pmatrix} \kappa\hat{\theta}^{ab}_- & 0 \\ -2\kappa\Pi_{+ic}\hat{\theta}^{cb}_- & \delta^i_j \end{pmatrix}, \tag{2.27}$$

and theirs inverse

$$Q^{-1}_{\mu\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 2\Pi_{-ab} & 0 \\ 2\Pi_{-ib} & \delta^j_i \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}^{-1}_{\mu\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 2\Pi_{+ab} & 0 \\ 2\Pi_{+ib} & \delta^j_i \end{pmatrix}, \tag{2.28}$$

perform T-dualization for the vector indices.

Note that different chiralities transform with different matrices $Q^{\hat{\mu}\nu}$ and $\bar{Q}^{\hat{\mu}\nu}$. Therefore, there are two types of T-dual vielbeins

$${}_ae^{\underline{a}\hat{\mu}} = e^{\underline{a}}{}_\nu(Q^T)^{\nu\hat{\mu}}, \quad {}_a\bar{e}^{\underline{a}\hat{\mu}} = e^{\underline{a}}{}_\nu(\bar{Q}^T)^{\nu\hat{\mu}}, \tag{2.29}$$

with the same T-dual metric

$$\begin{aligned} {}_aG^{\hat{\mu}\hat{\nu}} &\equiv ({}_ae^T\eta\,{}_ae)^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (QGQ^T)^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = {}_a\bar{G}^{\hat{\mu}\hat{\nu}} \\ &\equiv ({}_a\bar{e}^T\eta\,{}_a\bar{e})^{\hat{\mu}\hat{\nu}} = (\bar{Q}G\bar{Q}^T)^{\hat{\mu}\hat{\nu}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

The Lorentz indices are underlined (denoted by $\underline{a}, \underline{b}$).

The two T-dual vielbeins are equivalent because they are related by the particular local Lorentz transformation

$${}_a\bar{e}^{\underline{a}\hat{\mu}} = \Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}\,{}_ae^{\underline{b}\hat{\mu}}, \quad \Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = e^{\underline{a}}{}_\mu(Q^{-1}\bar{Q})^{T\mu}{}_\nu(e^{-1})^\nu{}_{\underline{b}}. \tag{2.31}$$

From (2.27) and (2.28) we have

$$(Q^{-1}\bar{Q})^{T\mu}{}_\nu = \begin{pmatrix} \delta^a{}_b + 2\kappa\hat{\theta}^{ac}_+ G_{cb} & 2\kappa\hat{\theta}^{ac}_+ G_{cj} \\ 0 & \delta^i_j \end{pmatrix}, \tag{2.32}$$

which produces

$$\Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = \delta^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} - 2\omega^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}, \qquad \omega^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = -\kappa e^{\underline{a}}{}_a\hat{\theta}^{ab}_+(e^T)_b{}^{\underline{c}}\eta_{\underline{cb}}. \tag{2.33}$$

It satisfies definition of Lorentz transformations

$$\Lambda^T\eta\Lambda = \eta \quad \Longrightarrow \quad \det\Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = \pm 1. \tag{2.34}$$

After careful calculations we have $\det\Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = (-1)^d$, where d is the number of dimensions along which we perform T-duality.

2.3.2 Two sets of Γ-matrices in T-dual theory

Because in T-dual theory there are two vielbeins, there must also be two sets of Γ-matrices in curved space

$$\begin{aligned} {}_a\Gamma_{\hat{\mu}} &= ({}_ae^{-1})_{\hat{\mu}\underline{a}}\Gamma^{\underline{a}} = ({}_ae^{-1}\Gamma)_{\hat{\mu}}, \\ {}_a\bar{\Gamma}_{\hat{\mu}} &= ({}_a\bar{e}^{-1})_{\hat{\mu}\underline{a}}\Gamma^{\underline{a}} = ({}_a\bar{e}^{-1}\Gamma)_{\hat{\mu}}. \end{aligned} \tag{2.35}$$

They are related by the expression

$${}_a\bar{\Gamma}_{\hat{\mu}} = {}_a\Omega^{-1}\,{}_a\Gamma_{\hat{\mu}}\,{}_a\Omega, \tag{2.36}$$

where ${}_a\Omega$ is a spinorial representation of the Lorentz transformation

$${}_a\Omega^{-1}\,\Gamma^{\underline{a}}\,{}_a\Omega = (\Lambda^{-1})^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}\,\Gamma^{\underline{b}}. \tag{2.37}$$

2.3.3 Two sets of spin connections in T-dual theory

The spin connection can be expressed in terms of vielbeins as

$$\omega_\mu{}^{\underline{ab}} = \frac{1}{2}(e^{\nu\underline{a}}c^{\underline{b}}_{\mu\nu} - e^{\nu\underline{b}}c^{\underline{a}}_{\mu\nu}) - \frac{1}{2}e^{\rho\underline{a}}e^{\sigma\underline{b}}c_{\underline{c}\rho\sigma}e^{\underline{c}}{}_\mu, \tag{2.38}$$

where

$$c^{\underline{a}}_{\mu\nu} = \partial_\mu e^{\underline{a}}{}_\nu - \partial_\nu e^{\underline{a}}{}_\mu. \tag{2.39}$$

Therefore, in T-dual theory there are two spin connections, defined in terms of two vielbeins. As a consequence of (2.31) they are related as

$${}_a\bar\omega^{\hat\mu\underline{a}}{}_{\underline{b}} = \Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{c}}\, {}_a\omega^{\hat\mu\underline{c}}{}_{\underline{d}}\, (\Lambda^{-1})^{\underline{d}}{}_{\underline{b}} + \Lambda^{\underline{a}}{}_{\underline{c}}\, \partial^{\hat\mu}\, (\Lambda^{-1})^{\underline{c}}{}_{\underline{b}}. \tag{2.40}$$

It is useful to introduce the spin connection in the form

$$\omega_\mu = \omega_{\mu\underline{ab}}\Gamma^{\underline{ab}}, \tag{2.41}$$

where

$$\Gamma^{\underline{ab}} = \Gamma^{\underline{a}}\Gamma^{\underline{b}} - \Gamma^{\underline{b}}\Gamma^{\underline{a}}. \tag{2.42}$$

Then from (2.37) for ${}_a\Omega = \text{const}$ we obtain

$${}_a\bar\omega^{\hat\mu} = {}_a\Omega^{-1}\, {}_a\omega^{\hat\mu}\, {}_a\Omega. \tag{2.43}$$

2.3.4 Single form of supersymmetry invariants in T-dual theory and new spinor coordinates

So far we used the action from Ref. [45] which is an expansion in powers of θ^α and $\bar\theta^\alpha$. We performed the procedure of bosonic T-dualization using the first term in the expansion i.e. θ^α and $\bar\theta^\alpha$ independent part of the action. Consequently, the supersymmetric invariants, $\Pi^\mu_\pm$, d_α and $\bar d_\alpha$, in that approximation became $\partial_\pm x^\mu$, π_α and $\bar\pi_\alpha$. But if we would take higher power terms into consideration, then these invariants would appear again in the theory. Consequently, we can use these invariants to find proper spinor variables.

From the compatibility between supersymmetry and T-duality we will find appropriate spinor variables changing the bar ones. We are not going to apply such a procedure to background fields which transformation we will find from T-dualization. In Sect. 2.5 we will check that both T-dual gravitinos satisfy a single supersymmetry transformation rule.

Note that according to [38,53–59] fermionic coordinates, θ^α and $\bar\theta^\alpha$, and their canonically conjugated momenta, π_α and $\bar\pi_\alpha$, are parts of the supersymmetry invariant variables,

$$d_\alpha = \pi_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\theta)_\alpha\left(\partial_+ x^\mu + \frac{1}{4}\theta\Gamma^\mu\partial_+\theta\right)$$
$$\bar d_\alpha = \bar\pi_\alpha - \frac{1}{2}(\Gamma_\mu\bar\theta)_\alpha\left(\partial_- x^\mu + \frac{1}{4}\bar\theta\Gamma^\mu\partial_-\bar\theta\right). \tag{2.44}$$

In T-dual theory, as a consequence of two types of Γ matrices, there are two types supersymmetry invariant variables,

$${}_a d_\alpha = {}_a\pi_\alpha - \frac{1}{2}({}_a\Gamma^{\hat\mu}\, {}_a\theta)_\alpha\left(\partial_+\, {}_aX_{\hat\mu} + \frac{1}{4}{}_a\theta_a\Gamma_{\hat\mu}\partial_+\, {}_a\theta\right), \tag{2.45}$$

$${}_a\bar d_\alpha = {}_a\bar\pi_\alpha - \frac{1}{2}({}_a\bar\Gamma^{\hat\mu}\, {}_a\bar\theta)_\alpha\left(\partial_-\, {}_aX_{\hat\mu} + \frac{1}{4}{}_a\bar\theta_a\bar\Gamma_{\hat\mu}\partial_-\, {}_a\bar\theta\right). \tag{2.46}$$

We want the two expressions to have the same Γ matrices. Using Eq. (2.36) we can rewrite the bar expressions as

$$({}_a\Omega\, {}_a\bar d)_\alpha = ({}_a\Omega\, {}_a\bar\pi)_\alpha - \frac{1}{2}({}_a\Gamma^{\hat\mu}{}_a\Omega\, {}_a\bar\theta)_\alpha\Big(\partial_-\, {}_aX_{\hat\mu}$$
$$+\frac{1}{4}{}_a\bar\theta\, {}_a\Omega^{-1}{}_a\Gamma_{\hat\mu}\, {}_a\Omega\, \partial_-{}_a\bar\theta\Big). \tag{2.47}$$

Therefore, if we preserve expressions for ${}_a\theta^\alpha = \theta^\alpha$ and ${}_a\pi_\alpha = \pi_\alpha$, change bar variables

$${}^\bullet\bar\theta^\alpha \equiv {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\, {}_a\bar\theta^\beta, \quad {}^\bullet\bar\pi_\alpha \equiv {}_a\Omega_\alpha{}^\beta\, {}_a\bar\pi_\beta, \tag{2.48}$$

and take

$$\Omega^2 = 1, \tag{2.49}$$

the transformation with bar variables will get the same form as those without bar in ${}_a d_\alpha$. Consequently, the T-dual supersymmetric invariant variables ${}_a d_\alpha$ and ${}_a\Omega_\alpha{}^\beta\, {}_a\bar d_\beta$ are expressed in a unique form in terms of the true T-dual spinor variables θ^α, π_α, ${}^\bullet\bar\theta^\alpha$ and ${}^\bullet\bar\pi_\alpha$,

$${}_a d_\alpha = d_\alpha, \quad {}^\bullet\bar d_\alpha = {}_a\Omega_\alpha{}^\beta\bar d_\beta = {}^\bullet\bar\pi_\alpha - \frac{1}{2}({}_a\Gamma^{\hat\mu}\, {}^\bullet\bar\theta)_\alpha$$
$$\times(\partial_-\, {}_aX_{\hat\mu} + \frac{1}{4}{}^\bullet\bar\theta\, {}_a\Gamma_{\hat\mu}\partial_-\, {}^\bullet\bar\theta), \tag{2.50}$$

if condition (2.49) is satisfied.

2.3.5 Spinorial representation of the Lorentz transformation

In order to find expressions for the bar spinors in a T-dual background we should first solve Eq. (2.37) and find the expression for ${}_a\Omega$. We will do it for $B_{\mu\nu} \to 0$, so that $\hat\theta^{ab}_+ \to -\frac{1}{\kappa}(\tilde G^{-1})^{ab}$, where $\tilde G_{ab}$ is the ab component of $G_{\mu\nu}$. Then from (2.33) it follows that

$${}_a\omega^{\underline{ab}} \to e^{\underline{a}}{}_a(\tilde G^{-1})^{ab}(e^T)_b{}^{\underline{b}} \equiv {}_aP^{\underline{ab}}, \tag{2.51}$$

where ${}_aP^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}$ is some a dependent projector on the $\underline{ab}$ subspace ${}_aP^{\underline{a}}{}_{\underline{c}}\, {}_aP^{\underline{c}}{}_{\underline{b}} = {}_aP^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}$. If we introduce the Γ-matrices in curved space

$$\Gamma^\mu = (e^{-1})^\mu{}_{\underline{a}}\Gamma^{\underline{a}}, \tag{2.52}$$

we can rewrite Eq. (2.37) in the form

$${}_a\Omega\,\Gamma^\mu = \left[\Gamma^\mu - 2\,((e^{-1})^\mu{}_{\underline{a}}\, {}_aP^{\underline{a}}{}_{\underline{b}}\,\Gamma^{\underline{b}}\right]{}_a\Omega. \tag{2.53}$$

To simplify the derivation from now on we will suppose that the metric tensor is diagonal. Then $(e^{-1})^{\mu}{}_{\underline{a}}\,{}_aP^{\underline{a}}{}_{\underline{b}} = \delta^{\mu}_a (e^{-1})^a{}_{\underline{a}}$ and we have

$$ {}_a\Omega\,\Gamma^{\mu} = \left[\Gamma^{\mu} - 2\,\delta^{\mu}_a\,\Gamma^a\right]{}_a\Omega. \tag{2.54}$$

For $\mu = a$ and $\mu = i$ we obtain

$$ {}_a\Omega\,\Gamma^a = -\Gamma^a\,{}_a\Omega, \quad {}_a\Omega\,\Gamma^i = \Gamma^i\,{}_a\Omega. \tag{2.55}$$

The Γ-matrices in curved space for a diagonal metric satisfy the algebra

$$\{\Gamma^a, \Gamma^b\} = 2(G^{-1})^{ab}, \quad \{\Gamma^a, \Gamma^i\} = 0, \quad \{\Gamma^i, \Gamma^j\} = 2(G^{-1})^{ij}. \tag{2.56}$$

We should find such an ${}_a\Omega$ as anticommutes with all matrices Γ^a and commutes with all matrices Γ^i. Let us first introduce the Γ^{11} matrix,

$$\Gamma^{11} = (i)^{\frac{D(D-1)}{2}} \frac{1}{\prod_{\mu=0}^{D-1} G_{\mu\mu}} \varepsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_D}\Gamma^{\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\cdots\Gamma^{\mu_D}, \tag{2.57}$$

where the normalization constant is chosen so that Γ^{11} satisfies the condition $(\Gamma^{11})^2 = 1$.

Then we define an analogy of the Γ^{11} matrix in the subspace spanned by the T-dualized directions

$$ {}_a\Gamma = (i)^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{i=1}^{d} \Gamma^{a_i} = (i)^{\frac{d(d-1)}{2}}\,\Gamma^{a_1}\Gamma^{a_2}\cdots\Gamma^{a_d}, \tag{2.58}$$

so that

$$({}_a\Gamma)^2 = \prod_{i=1}^{d} G^{a_i a_i} = \frac{1}{\prod_{i=1}^{d} G_{a_i a_i}}. \tag{2.59}$$

Their commutation (anticommutation) relations with one Γ matrix depend on the number of coordinates d, along which we perform T-dualizations. Therefore we have

$$ {}_a\Gamma\,\Gamma^a = (-1)^{d+1}\,\Gamma^a\,{}_a\Gamma, \quad {}_a\Gamma\,\Gamma^i = (-1)^d\,\Gamma^i\,{}_a\Gamma, \tag{2.60}$$

which means that the solution of Eq. (2.55) is proportional to

$$ {}_a\Omega \sim {}_a\Gamma\,(\Gamma^{11})^d. \tag{2.61}$$

Taking into account (2.49), ${}_a\Omega^2 = 1$, we obtain

$$ {}_a\Omega = \sqrt{\prod_{i=1}^{d} G_{a_i a_i}}\;{}_a\Gamma\,(i\,\Gamma^{11})^d. \tag{2.62}$$

This is a general solution. Note that for $a_1 \bigcap a_2 = 0$ we have ${}_{a_1}\Omega\,{}_{a_2}\Omega = (-1)^{d_1 d_2}\,{}_a\Omega$, where $a = a_1 \bigcup a_2$.

When the number of coordinates along which we perform T-duality is even ($d = 2k$), we have ${}_a\Omega = (-1)^{\frac{d}{2}}\sqrt{\prod_{i=1}^{d} G_{a_i a_i}}\;{}_a\Gamma$. As a consequence of the relation $\Gamma^{11}\,{}_a\Omega = (-1)^d\,{}_a\Omega\,\Gamma^{11}$ we can conclude that in that case bar spinors preserve chirality. When the number of coordinates along which we perform T-duality is odd ($d = 2k+1$), we have ${}_a\Omega = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\sqrt{\prod_{i=1}^{d} G_{a_i a_i}}\;i\;{}_a\Gamma\,\Gamma^{11}$. As a consequence of the above relation such a transformation changes the chirality of the bar spinors.

In the particular case that we perform T-dualization along only one direction, x^{a_1}, ${}_a\Gamma \to \Gamma^{a_1}$, $d \to 1$ and we obtain the result, well known in the literature [1–3,46,47],

$$ {}_{a_1}\Omega = i\sqrt{G_{a_1 a_1}}\;\Gamma^{a_1}\,\Gamma^{11}. \tag{2.63}$$

This is the case of the transition between IIA and IIB theory, when T-duality changes the chirality of the bar spinors.

When we perform T-dualization along all coordinates, $d \to D = 10$, ${}_a\Gamma \to \frac{\Gamma^{11}}{\sqrt{\prod_{\mu=0}^{D-1} G_{\mu\mu}}}$ and from (2.62) we obtain

$$ {}^{\star}\Omega = (-1)^{\frac{D}{2}}\;\Gamma^{11} = -\Gamma^{11}. \tag{2.64}$$

2.4 Choice of the proper fermionic coordinates and T-dual background fields

We have already learned that in order to have compatibility between supersymmetry and T-duality, we should choose the dual bar variables with a bullet in accordance with (2.48). Therefore, before we read the T-dual background fields, we will reexpress the action (2.20) in terms of the appropriate spinor coordinates (2.48) which, with the help of the relation ${}_a\Omega^2 = 1$, produces

$$\begin{aligned}
&{}_aS(y_a, x^i, \theta^\alpha, {}^{\bullet}\bar\theta^\alpha, \pi_\alpha, {}^{\bullet}\bar\pi_\alpha) \\
&= \int_\Sigma d^2\xi \Big\{ \frac{\kappa^2}{2}\partial_+ y_a \hat\theta^{ab}_-\partial_- y_b + \kappa^2\partial_+ y_a\hat\theta^{ab}_-\Pi_{+bj}\partial_- x^j \\
&\quad - \kappa^2\partial_+ x^i\,\Pi_{+ia}\hat\theta^{ab}_-\partial_- y_b + \frac{1}{4\pi}\Phi R^{(2)} \\
&\quad + \kappa\partial_+ x^i(\Pi_{+ij} - 2\kappa\,\Pi_{+ia}\hat\theta^{ab}_-\Pi_{+bj})\partial_- x^j \\
&\quad - \pi_\alpha\partial_-(\theta^\alpha + \Psi^\alpha_i x^i - 2\Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_-\Pi_{+bj}x^j - \Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_- y_b) \\
&\quad + \partial_+[{}^{\bullet}\bar\theta^\gamma\,{}_a\Omega_\gamma{}^\alpha + \bar\Psi^\alpha_i x^i + 2\bar\Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_+\Pi_{-bj}x^j \\
&\quad + \bar\Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_+ y_b]{}_a\Omega_\alpha{}^\beta\,{}^{\bullet}\bar\pi_\beta + 2\pi_\alpha\Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_-\bar\Psi^\beta_b\,{}_a\Omega_\beta{}^\gamma\,{}^{\bullet}\bar\pi_\gamma \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa}\,e^{\frac{\Phi}{2}}\,\pi_\alpha F^{\alpha\beta}\,{}_a\Omega_\beta{}^\gamma\,{}^{\bullet}\bar\pi_\gamma \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Consequently, applying the Buscher T-dualization procedure [4,5] along the bosonic coordinates x^a of the action (2.13) the T-dual action gets the form

$$\begin{aligned}
{}_aS &= \int_\Sigma d^2\xi \Big[\kappa\partial_+({}_aX)_{\hat\mu}\,{}_a\Pi_+^{\hat\mu\hat\nu}\partial_-({}_aX)_{\hat\nu} + \frac{1}{4\pi}\,{}_a\Phi R^{(2)} \\
&\quad - \pi_\alpha\partial_-[\theta^\alpha + {}_a\Psi^{\alpha\hat\mu}({}_aX)_{\hat\mu}] + \partial_+[{}^{\bullet}\bar\theta^\alpha + {}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu}({}_aX)_{\hat\mu}]\,{}^{\bullet}\bar\pi_\alpha \\
&\quad + \frac{1}{2\kappa}e^{\frac{{}_a\Phi}{2}}\pi_\alpha\;{}_aF^{\alpha\beta}\,{}^{\bullet}\bar\pi_\beta\Big],
\end{aligned} \tag{2.66}$$

where $({}_aX)_{\hat\mu} = (y_a, x^i)$, ${}_a\Psi^{\alpha\hat\mu} = ({}_a\Psi^{\alpha a}, {}_a\Psi^\alpha_i)$ and ${}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu} = ({}_a\bar\Psi^{\alpha a}, {}_a\bar\Psi^\alpha_i)$.

Now, we are ready to read the T-dual background fields

$$ {}_a\Pi^{ab}_\pm = \frac{\kappa}{2}\hat\theta^{ab}_\mp, \tag{2.67}$$

$$ {}_a\Pi_{\pm i}{}^a = -\kappa\Pi_{\pm ib}\hat\theta^{ba}_\mp, \quad {}_a(\Pi_\pm)^a{}_i = \kappa\hat\theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bi}, \tag{2.68}$$

$$ {}_a\Pi_{\pm ij} = \Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ia}\hat\theta^{ab}_\mp\Pi_{\pm bj}, \tag{2.69}$$

$$ {}_a\Psi^{\alpha a} = \kappa\hat\theta^{ab}_+\Psi^\alpha_b, \quad {}_a\bar\Psi^{\alpha a} = \kappa\ {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\,\hat\theta^{ab}_-\bar\Psi^\beta_b, \tag{2.70}$$

$$ {}_a\Psi^\alpha_i = \Psi^\alpha_i - 2\kappa\Pi_{-ib}\hat\theta^{ba}_+\Psi^\alpha_a,$$
$$ {}_a\bar\Psi^\alpha_i = {}_a\Omega^\alpha{}_\beta(\bar\Psi^\beta_i - 2\kappa\Pi_{+ib}\theta^{ba}_-\bar\Psi^\beta), \tag{2.71}$$

$$ e^{\frac{{}_a\Phi}{2}}\,{}_aF^{\alpha\beta} = \left(e^{\frac{\Phi}{2}}F^{\alpha\gamma} + 4\kappa\Psi^\alpha_a\hat\theta^{ab}_-\bar\Psi^\gamma_b\right){}_a\Omega_\gamma{}^\beta \tag{2.72}$$

when ${}_a\Omega$ is defined in (2.62).

The dilaton transformation in the term $\Phi R^{(2)}$ originates from quantum theory and will be discussed in Sect. 2.6.

2.5 Supersymmetry transformations of T-dual gravitinos

Note that in the expressions for the T-dual fields ${}_a\bar\Psi^{\alpha a}$, ${}_a\bar\Psi^\alpha_i$ and ${}_aF^{\alpha\beta}$ the matrix ${}_a\Omega$ appears as a consequence of the T-dualization procedure and adoption of the bullet spinor coordinates. In Refs. [46,47] it appears as a consequence of the compatibility between supersymmetry and T-duality.

A supersymmetry transformation of the gravitino is expressed in terms of covariant derivatives,

$$ \delta_\varepsilon\Psi^\alpha_\mu = D_\mu\,\varepsilon^\alpha + \cdots, \quad \delta_{\bar\varepsilon}\bar\Psi^\alpha_\mu = D_\mu\,\bar\varepsilon^\alpha + \cdots, \tag{2.73}$$

with the same covariant derivative on both left and right spinors,

$$ D_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu. \tag{2.74}$$

In the T-dual theory, as a consequence of the two kinds of spin connections, there are two kinds of covariant derivatives,

$$ {}_aD^{\hat\mu} = \partial^{\hat\mu} + {}_a\omega^{\hat\mu}, \quad {}_a\bar D^{\hat\mu} = \partial^{\hat\mu} + {}_a\bar\omega^{\hat\mu}, \tag{2.75}$$

such that

$$ {}_a\delta_\varepsilon\,{}_a\Psi^{\alpha\hat\mu} = {}_aD^{\hat\mu}\varepsilon^\alpha, \quad {}_a\bar\delta_{\bar\varepsilon}\,{}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu} = {}_a\bar D^{\hat\mu}\bar\varepsilon^\alpha. \tag{2.76}$$

Let us show that improvement with ${}_a\Omega$ in the transformation of the bar gravitinos just turns ${}_a\bar D^{\hat\mu}$ to ${}_aD^{\hat\mu}$. In fact, from

$$ {}_a\bar\delta_{\bar\varepsilon}\,{}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu} = {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\left(\partial^{\hat\mu}\bar\varepsilon^\beta + {}_a\bar\omega^{\hat\mu\beta}{}_\gamma\bar\varepsilon^\gamma\right), \tag{2.77}$$

with the help of (2.43), for constant ${}_a\Omega$, we have

$$ {}_a\bar\delta_{\bar\varepsilon}\,{}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu} = \partial^{\hat\mu}({}_a\Omega^\alpha{}_\beta\bar\varepsilon^\beta) + {}_a\omega^{\hat\mu\alpha}{}_\beta\,{}_a\Omega^\beta{}_\gamma\bar\varepsilon^\gamma$$
$$ = {}_aD^{\hat\mu}({}_a\Omega^\alpha{}_\beta\bar\varepsilon^\beta) = {}_a\delta_{{}_a\Omega\bar\varepsilon}\,{}_a\bar\Psi^{\alpha\hat\mu}. \tag{2.78}$$

Therefore, it is clear that in order to preserve the same spin connection for the two chiralities we should additionally change the bar supersymmetry parameter

$$ {}^\bullet\bar\varepsilon^\alpha \equiv ({}_a\Omega)^\alpha{}_\beta\ {}_a\bar\varepsilon^\beta. \tag{2.79}$$

2.6 Transformation of pure spinors

In this subsection we will find transformation laws for pure spinors, λ^α and $\bar\lambda^\alpha$, which are the main ingredient of the pure spinor formalism.

It is well known that pure spinors satisfy the so-called pure spinor constraints,

$$ \lambda^\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\lambda^\beta = 0, \quad \bar\lambda^\alpha(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\bar\lambda^\beta = 0. \tag{2.80}$$

After T-dualization they turn into

$$ {}_a\lambda^\alpha({}_a\Gamma_{\hat\mu})_{\alpha\beta}\ {}_a\lambda^\beta = 0, \quad {}_a\bar\lambda^\alpha({}_a\bar\Gamma_{\hat\mu})_{\alpha\beta}\ {}_a\bar\lambda^\beta = 0. \tag{2.81}$$

The relation between matrices ${}_a\Gamma_{\hat\mu}$ and ${}_a\bar\Gamma_{\hat\mu}$ is given in (2.36). In order to have the two cases expressed with the same gamma matrices, as before, we preserve the expression for the unbar variables,

$$ {}_a\lambda^\alpha = \lambda^\alpha. \tag{2.82}$$

and change bar variables

$$ {}^\bullet\bar\lambda^\alpha = {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\ {}_a\bar\lambda^\beta. \tag{2.83}$$

The variables w_α and $\bar w_\alpha$ are canonically conjugated momenta to the pure spinors λ^α and $\bar\lambda^\alpha$, respectively. The transformation laws for pure spinor momenta can be found from the expressions for $N^{\mu\nu}_+$ and $\bar N^{\mu\nu}_-$ (2.5) which would appear in the action if we would take higher power terms in θ^α and $\bar\theta^\alpha$. After T-dualization these expressions become

$$ {}_aN_{+\hat\mu\hat\nu} = \frac{1}{2}{}_aw_\alpha({}_a\Gamma_{[\hat\mu\hat\nu]})^\alpha{}_\beta\ {}_a\lambda^\beta,$$
$$ {}_a\bar N_{-\hat\mu\hat\nu} = \frac{1}{2}{}_a\bar w_\alpha({}_a\bar\Gamma_{[\hat\mu\hat\nu]})^\alpha{}_\beta\ {}_a\bar\lambda^\beta. \tag{2.84}$$

Using Eq. (2.36) and the definition of $\Gamma^{[\mu\nu]}$ (2.16) we see that the relation between ${}_a\Gamma_{[\hat\mu\hat\nu]}$ and ${}_a\bar\Gamma_{[\hat\mu\hat\nu]}$ is the same as between the gamma matrices (2.36). As in the previous case, in order to have unique set of gamma matrices, we do not change the unbar variables,

$$ {}_aw_\alpha = w_\alpha, \tag{2.85}$$

while we choose bar variables in the form

$$ {}^\bullet\bar w_\alpha = {}_a\Omega_\alpha{}^\beta\ {}_a\bar w_\beta. \tag{2.86}$$

Let us note that free field actions S_λ and $S_{\bar\lambda}$ are invariant under T-dualization because ${}_a\Omega^2 = 1$.

2.7 T-dual transformation of antisymmetric fields: from IIB to IIA theory

To find the T-dual transformation laws for antisymmetric fields we will start with Eq. (2.72). First, as explained in Refs. [4,5,60] the quantization procedure produces the well-known shift in the dilaton transformation

$$ {}_a\Phi = \Phi - \ln\det(2\Pi_{+ab}) = \Phi - \ln\sqrt{\frac{\det G_{ab}}{\det {}_aG^{ab}}}. \tag{2.87} $$

Together with (2.72) it gives a relation between the initial and T-dual background fields,

$$ {}_aF^{\alpha\beta} = \sqrt[4]{\frac{\det G_{ab}}{\det {}_aG^{ab}}}\,(F^{\alpha\gamma} + 4e^{-\frac{\Phi}{2}}\kappa\Psi_a^\alpha\hat\theta_-^{ab}\bar\Psi_b^\gamma)_a\Omega_\gamma{}^\beta. \tag{2.88} $$

For $B_{\mu\nu}=0$ we have ${}_aG^{ab}=(G_E^{-1})^{ab}=(G^{-1})^{ab}$, and consequently $\sqrt[4]{\frac{\det G_{ab}}{\det {}_aG^{ab}}}=\sqrt[4]{(\det G_{ab})^2}=\sqrt{|\det G_{ab}|}$. It is important to stress that unlike in Eq. (2.62) for ${}_a\Omega$ here we have the absolute value under the square root. For a diagonal metric $G_{\mu\nu}$ we have $\det G_{ab}=\prod_{i=1}^d G_{a_ia_i}$ and taking into account Eq. (2.62) we find

$$ {}_aF^{\alpha\beta} = i^d\sqrt{\mathrm{sign}\left(\prod_{i=1}^d G_{a_ia_i}\right)\prod_{i=1}^d G_{a_ia_i}} \times\left(F^{\alpha\gamma}+4e^{-\frac{\Phi}{2}}\kappa\Psi_a^\alpha\hat\theta_-^{ab}\bar\Psi_b^\gamma\right)({}_a\Gamma\,\Gamma_{11}^d)_\gamma{}^\beta. \tag{2.89} $$

Note that we are going to T-dualize all D-directions. Then it is necessary to perform T-dualization along the time-like direction. Here the above square root has important consequences. For our signature $(+,-,-,\dots,-)$, the square of the field strength $({}_aF^{\alpha\beta})^2$ and, consequently, the square of all antisymmetric fields will change the sign when we perform T-dualization along the time-like direction. This is just what we need to obtain type $II^\star$ theories in accordance with Ref. [37].

In a simple case when gravitino fields and Kalb–Ramond field are zero and metric is diagonal we will express the transition from type IIB to type IIA theory. Taking $d=1$ we have

$$ {}_aF^{\alpha\beta} = i\sqrt{\mathrm{sign}(G_{aa})}\;G_{aa}\;F^{\alpha\gamma}\,(\Gamma^{11}\Gamma^a)_\gamma{}^\beta. \tag{2.90} $$

Let us choose type IIB as a starting theory. The matrix Γ^{11} turns $F^{(n)}$ to $F^{(10-n)}$ where

$$ (\mathrm{F}^{(n)})^{\alpha\beta} = \frac{1}{n!}F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\Gamma^{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}])^{\alpha\beta}. \tag{2.91} $$

As a consequence of the chirality condition $F\Gamma^{11}=-\Gamma^{11}F$ the independent tensors are $F^{(1)}$, $F^{(3)}$ and self-dual part of $F^{(5)}$. So we can write

$$ F^{\alpha\gamma}(\Gamma^{11})_\gamma{}^\beta = \left(\mathrm{F}^{(1)}+\mathrm{F}^{(3)}+\frac{1}{2}\mathrm{F}^{(5)}\right)^{\alpha\beta}. \tag{2.92} $$

Similarly, in T-dual theory (here it is IIA) we have

$$ {}_aF^{\alpha\beta} = ({}_a\mathrm{F}^{(2)} + {}_a\mathrm{F}^{(4)})^{\alpha\beta}, \tag{2.93} $$

where now

$$ ({}_a\mathrm{F}^{(n)})^{\alpha\beta} = \frac{1}{n!}{}_aF^{\hat\mu_1\hat\mu_2\cdots\hat\mu_n}({}_a\Gamma_{[\hat\mu_1\hat\mu_2\cdots\hat\mu_n}])^{\alpha\beta}. \tag{2.94} $$

The Γ-matrices on both sides are defined in curved space. For the initial theory it is just (2.52), while for T-dual theory it is defined in the first relation in Eq. (2.35) as ${}_a\Gamma_{\hat\mu}=({}_ae^{-1})_{\hat\mu\underline{a}}\Gamma^{\underline{a}}$. As a consequence of the first relation (2.29) between the vielbeins ${}_ae^{\underline{a}\hat\mu}=e^{\underline{a}}{}_\nu(Q^T)^{\nu\hat\mu}$ we can find the relation between the Γ-matrices,

$$ {}_a\Gamma_{\hat\mu} = (Q^{-1T})_{\hat\mu\nu}\Gamma^\nu, \tag{2.95} $$

which produces

$$ ({}_a\mathrm{F}^{(n)})^{\alpha\beta} = \frac{1}{n!}({}^Q_aF)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}(\Gamma^{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n]})^{\alpha\beta}, \tag{2.96} $$

where

$$ ({}^Q_aF)_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = {}_aF^{\hat\mu_1\hat\mu_2\cdots\hat\mu_n}(Q^{-1T})_{\hat\mu_1\mu_1} \times(Q^{-1T})_{\hat\mu_2\mu_2}\cdots(Q^{-1T})_{\hat\mu_n\mu_n}. \tag{2.97} $$

Using the standard relation between the Γ-matrices,

$$ \Gamma^{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_n]}\Gamma^a = \Gamma^{\mu\mu_1\mu_2\cdots\mu_na} - \frac{1}{(n-1)!}G^{a[\mu_n}\Gamma^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}]}, \tag{2.98} $$

we obtain

$$ F^{(n)}\Gamma^a = \frac{1}{n!}F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}\Gamma^{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_na]} - \frac{1}{(n-1)!}F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}{}^a\,\Gamma^{[\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}]}. \tag{2.99} $$

Therefore, from (2.90), (2.92), (2.93), (2.96), (2.97) and (2.99) we can find a general relation connecting antisymmetric fields of Type IIA and type IIB theories,

$$ {}_a\mathrm{F}^{\hat\mu_1\hat\mu_2\cdots\hat\mu_n} = \sqrt{\mathrm{sign}G_{aa}}\,G_{aa}(nF_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_{n-1}}\delta^a{}_{\mu_n} - F_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}{}^a)(Q^T)^{\mu_1\hat\mu_1}(Q^T)^{\mu_2\hat\mu_2}\cdots(Q^T)^{\mu_n\hat\mu_n}. \tag{2.100} $$

Under our assumptions we have

$$ (Q^T)^{\mu\hat\mu} = \begin{pmatrix} -G^{aa} & 0 \\ 0 & \delta_i{}^j \end{pmatrix}, \tag{2.101} $$

and consequently

$$ {}_aF_{ij} = -i\sqrt{\text{sign}G_{aa}}G_{aa}F_{ij}{}^a, \quad {}_aF_i{}^a = -2i\sqrt{\text{sign}G_{aa}}F_i, \tag{2.102} $$

$$ \begin{aligned} {}_aF_{ijkq} &= -\frac{i}{2}\sqrt{\text{sign}G_{aa}}G_{aa}F_{ijkq}{}^a, \\ {}_aF_{ijk}{}^a &= -4i\sqrt{\text{sign}G_{aa}}F_{ijk}. \end{aligned} \tag{2.103} $$

For the space-like directions $G_{aa} < 0$ and $i\sqrt{\text{sign}G_{aa}}$ is real. For time-like direction $\sqrt{\text{sign}G_{aa}} \to \sqrt{\text{sign}G_{00}} = 1$ and the remaining imaginary unit causes squares of the antisymmetric fields to get an additional minus sign and type II theories to swap to type II* ones [37].

3 Double space formulation

In this section we will introduce double space, doubling all bosonic coordinates x^μ by corresponding T-dual ones y_μ. We will rewrite the transformation laws in double space and show that both the equations of motion and the Bianchi identities can be written by that single equation.

3.1 T-dualization along all bosonic directions

Applying the Buscher T-dualization procedure [4,5] along all bosonic coordinates of the action (2.13) the T-dual action has been obtained in Ref. [9]. This is a particular case of our relations (2.67)–(2.72) where the T-dual background fields are of the form

$$ {}^\star\Pi_\pm^{\mu\nu} \equiv {}^\star B^{\mu\nu} \pm \frac{1}{2}{}^\star G^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\Theta_\mp^{\mu\nu}, \tag{3.1} $$

$$ {}^\star\Psi^{\alpha\mu} = \kappa\Theta_+^{\mu\nu}\Psi_\nu^\alpha, \quad {}^\star\bar\Psi^{\alpha\mu} = \kappa\ {}^\star\Omega^\alpha{}_\beta\,\Theta_-^{\mu\nu}\bar\Psi_\nu^\beta, \tag{3.2} $$

$$ e^{\frac{{}^\star\Phi}{2}}\,{}^\star F^{\alpha\beta} = \left(e^{\frac{\Phi}{2}}F^{\alpha\gamma} + 4\kappa\Psi_\mu^\alpha\Theta_-^{\mu\nu}\bar\Psi_\nu^\gamma\right){}^\star\Omega_\gamma{}^\beta. \tag{3.3} $$

Here we use the notation

$$ \begin{aligned} &G_{\mu\nu}^E = G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu},\ \Theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}BG^{-1})^{\mu\nu}, \\ &{}^\star\Omega = -\Gamma^{11}, \end{aligned} \tag{3.4} $$

and

$$ \Theta_\pm^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}\Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}, \tag{3.5} $$

so that

$$ (\Pi_\pm\Theta_\mp)_\mu{}^\nu = \frac{1}{2\kappa}\delta_\mu{}^\nu. \tag{3.6} $$

From (3.1) and (3.5) it follows that

$$ {}^\star G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu}, \quad {}^\star B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\Theta^{\mu\nu}. \tag{3.7} $$

In this case the transformation laws (2.21) and (2.22) (the relations between the initial x^μ and T-dual coordinates y_μ) get the form

$$ \begin{aligned} &\partial_\pm x^\mu \cong -\kappa\Theta_\pm^{\mu\nu}\partial_\pm y_\nu + \kappa\Theta_\pm^{\mu\nu}J_{\pm\nu}, \\ &\partial_\pm y_\mu \cong -2\Pi_{\mp\mu\nu}\partial_\pm x^\nu + J_{\pm\mu}. \end{aligned} \tag{3.8} $$

3.2 Transformation laws in double space

Rewriting Eq. (3.8) in the form where terms multiplied by $\varepsilon_\pm{}^\pm = \pm 1$ are on the left-hand side of the equation, we obtain

$$ \begin{aligned} &\pm\partial_\pm y_\mu \cong G_{E\mu\nu}\partial_\pm x^\nu - 2(BG^{-1})_\mu{}^\nu\partial_\pm y_\nu \\ &\quad +2(\Pi_\pm G^{-1})_\mu{}^\nu J_{\pm\nu}, \end{aligned} \tag{3.9} $$

$$ \begin{aligned} &\pm\partial_\pm x^\mu \cong (G^{-1})^{\mu\nu}\partial_\pm y_\nu \\ &\quad +2(G^{-1}B)^\mu{}_\nu\partial_\pm x^\nu - (G^{-1})^{\mu\nu}J_{\pm\nu}. \end{aligned} \tag{3.10} $$

Let us introduce double space coordinates

$$ Z^M = \begin{pmatrix} x^\mu \\ y_\mu \end{pmatrix}, \tag{3.11} $$

which contain all initial and T-dual coordinates. In terms of double coordinates Eqs. (3.9) and (3.10) are replaced by one equation:

$$ \partial_\pm Z^M \cong \pm\Omega^{MN}(\mathcal{H}_{NP}\partial_\pm Z^P + J_{\pm N}), \tag{3.12} $$

where the matrix $\mathcal{H}_{MN}$ is known in the literature as the generalized metric and has the form

$$ \mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu}^E & -2B_{\mu\rho}(G^{-1})^{\rho\nu} \\ 2(G^{-1})^{\mu\rho}B_{\rho\nu} & (G^{-1})^{\mu\nu} \end{pmatrix}. \tag{3.13} $$

The double current $J_{\pm M}$ is defined as

$$ J_{\pm M} = \begin{pmatrix} 2(\Pi_\pm G^{-1})_\mu{}^\nu J_{\pm\nu} \\ -(G^{-1})^{\mu\nu}J_{\pm\nu} \end{pmatrix}, \tag{3.14} $$

and

$$ \Omega^{MN} = \begin{pmatrix} 0 & 1_D \\ 1_D & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.15} $$

is a constant symmetric matrix. Here 1_D denotes the identity operator in D dimensions. Let us stress that the matrix ${}_a\Omega$ and Ω^{MN} are different quantities.

By straightforward calculation we can prove the relations

$$ \mathcal{H}^T\Omega\mathcal{H} = \Omega, \quad \Omega^2 = 1, \quad \det\mathcal{H}_{MN} = 1, \tag{3.16} $$

which means that $\mathcal{H} \in SO(D, D)$. In calculation of determinant we use the rule for block matrices

$$ \det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det D\det(A - BD^{-1}C). \tag{3.17} $$

In double field theory Ω^{MN} is the $SO(D, D)$ invariant metric and denoted by η^{MN}.

3.3 Equations of motion and double space action

It is well known that the equations of motion of the initial theory are the Bianchi identities in T-dual picture and vice versa [12,19,22,60]. As a consequence of the identity

$$\partial_+\partial_- Z^M - \partial_-\partial_+ Z^M = 0, \tag{3.18}$$

known as the Bianchi identity, and Eq. (3.12), we obtain the consistency condition

$$\partial_+[\mathcal{H}_{MN}\partial_- Z^N + J_{-M}] + \partial_-[\mathcal{H}_{MN}\partial_+ Z^N + J_{+M}] = 0. \tag{3.19}$$

In components it takes the form

$$\begin{aligned} \partial_+\partial_- x^\mu &= -\frac{1}{\kappa}(G^{-1})^{\mu\nu}\left(\bar\Psi^\alpha_\nu\partial_+\bar\pi_\alpha + \Psi^\alpha_\mu\partial_-\pi_\alpha\right), \\ \partial_+\partial_- y_\nu &= -\frac{1}{\kappa}G^E_{\mu\nu}\left({}^\star\bar\Psi^{\alpha\mu}\partial_+\bar\pi_\alpha + {}^\star\Psi^{\alpha\mu}\partial_-\pi_\alpha\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

These equations are equations of motion of the initial and T-dual theory. Double space formalism enables us to write both equations of motion and Bianchi identities by the single relation (3.12).

Equation (3.19) is the equation of motion of the following action:

$$\begin{aligned} S = \frac{\kappa}{4}\int d^2\xi[&\partial_+ Z^M\mathcal{H}_{MN}\partial_- Z^N + \partial_+ Z^M J_{-M} \\ &+ J_{+M}\partial_- Z^M + L(\pi_\alpha,\bar\pi_\alpha)], \end{aligned} \tag{3.21}$$

where $L(\pi_\alpha,\bar\pi_\alpha)$ is an arbitrary functional of the fermionic momenta.

4 T-dualization of type II superstring theory as a permutation of coordinates in double space

In this section we will derive the transformations of the generalized metric and current, which are a consequence of the permutation of some subset of the bosonic coordinates with the corresponding T-dual ones. First we will present the method in the case of the complete T-dualization (along all bosonic coordinates) and find the expressions for T-dual background fields. Then we will apply the results to the case of partial T-dualization.

4.1 The case of complete T-dualization

In order to exchange all initial and T-dual coordinates let us introduce the permutation matrix

$$\mathcal{T}^M{}_N = \begin{pmatrix} 0 & 1_D \\ 1_D & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.1}$$

so that the double T-dual coordinate ${}^\star Z^M$ is obtained:

$${}^\star Z^M = \mathcal{T}^M{}_N Z^N = \begin{pmatrix} y_\mu \\ x^\mu \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

We require that the T-dual transformation law for the double T-dual coordinate ${}^\star Z^M$ has the same form as for the initial coordinate Z^M (3.12)

$$\partial_\pm {}^\star Z^M \cong \pm\Omega^{MN}({}^\star\mathcal{H}_{NP}\partial_\pm {}^\star Z^P + {}^\star J_{\pm N}). \tag{4.3}$$

Then the T-dual generalized metric ${}^\star\mathcal{H}_{MN}$ and T-dual current ${}^\star J_{\pm M}$ are

$${}^\star\mathcal{H}_{MN} = \mathcal{T}_M{}^K\mathcal{H}_{KL}\mathcal{T}^L{}_N, \quad {}^\star J_{\pm M} = \mathcal{T}_M{}^N J_{\pm N}. \tag{4.4}$$

Permutation of the coordinates (4.2) together with transformations of the background fields (4.4) represents the symmetry transformations of the action (3.21).

Using the corresponding expressions for $\mathcal{T}^M{}_N$, $\mathcal{H}_{MN}$ and $J_{\pm M}$, we obtain from the generalized metric transformation

$${}^\star G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu}, \quad {}^\star B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\Theta^{\mu\nu}. \tag{4.5}$$

Taking into account that as a consequence of (2.48) the bar dual variable is ${}^{\bullet\star}\bar\pi_\alpha = ({}^\star\Omega^T)_\alpha{}^\beta\bar\pi_\beta$, from the current transformations we have

$${}^\star\Psi^{\alpha\mu} = \kappa\Theta_+^{\mu\nu}\Psi^\alpha_\nu, \quad {}^\star\bar\Psi^{\alpha\mu} = \kappa\ {}^\star\Omega^\alpha{}_\beta\Theta_-^{\mu\nu}\bar\Psi^\beta_\nu, \tag{4.6}$$

where ${}^\star\Omega = -\Gamma^{11}$.

Consequently, using double space we can easily reproduce the results of T-dualization, Eqs. (3.7) and (3.2). The problem with T-dualization of the R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ will be discussed in Sect. 5.3.

4.2 The case of partial T-dualization

Applying the procedure presented in the previous subsection to the arbitrary subset of bosonic coordinates we will, in fact, describe all possible bosonic T-dualizations. Let us split the coordinate index μ into a and i ($a = 0,\ldots,d-1$, $i = d,\ldots,D-1$) and denote T-dualization along direction x^a and y_a by

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^a &= T^a\circ T_a, \quad T^a \equiv T^0\circ T^1\circ\cdots\circ T^{d-1}, \\ T_a &\equiv T_0\circ T_1\circ\cdots\circ T_{d-1}, \end{aligned} \tag{4.7}$$

where $\circ$ marks the operation of composition of T-dualizations. Permutation of the initial coordinates x^a with its T-dual y_a is realized by multiplying the double space coordinate by the constant symmetric matrix $(\mathcal{T}^a)^M{}_N$,

$${}_aZ^M \equiv \begin{pmatrix} y_a \\ x^i \\ x^a \\ y_i \end{pmatrix} = (\mathcal{T}^a)^M{}_N Z^N \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_a & 0 \\ 0 & 1_i & 0 & 0 \\ 1_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^a \\ x^i \\ y_a \\ y_i \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

where 1_a and 1_i are identity operators in the subspaces spanned by x^a and x^i, respectively. It is easily to check the following relations:

$$(\mathcal{T}^a\mathcal{T}^a)^M{}_N = \delta^M{}_N, \qquad (\mathcal{T}^a\Omega\mathcal{T}^a)^M{}_N = \Omega^M{}_N. \tag{4.9}$$

The first relation means that after two T-dualizations we get the initial theory, while the second relation means that $\mathcal{T}^a \in O(D, D)$.

Let us apply the same approach as in the case of the full T-dualization presented in the previous subsection. We require that the double T-dual coordinate ${}_aZ^M$ satisfy the T-duality transformations of the form like the initial one Z^M (3.12),

$$\partial_\pm\, {}_aZ^M \cong \pm\Omega^{MN}({}_a\mathcal{H}_{NK}\,\partial_\pm\, {}_aZ^K + {}_aJ_{\pm N}). \tag{4.10}$$

Consequently, we find the T-dual generalized metric

$${}_a\mathcal{H}_{MN} = (\mathcal{T}^a)_M{}^K\mathcal{H}_{KL}(\mathcal{T}^a)^L{}_N, \tag{4.11}$$

and the T-dual current

$${}_aJ_{\pm M} = (\mathcal{T}^a)_M{}^N J_{\pm N}. \tag{4.12}$$

Note that Eqs. (4.8), (4.11) and (4.12) are symmetry transformations of the action (3.21). The left subscript a means dualization along the x^a directions.

5 T-dual background fields

In this section we will show that permutation of some bosonic coordinates leads to the same T-dual background fields as standard Buscher procedure [9]. The transformation of the generalized metric (4.11) produces expressions for NS–NS T-dual background fields ($G_{\mu\nu}$ and $B_{\mu\nu}$). They are the same as in bosonic string case obtained in Ref. [35]. Therefore, we will just shortly repeat these results. From the transformation of the current $J_{\pm M}$ (4.12) we will find T-dual background fields of the NS–R sector (Ψ^α_μ and $\bar\Psi^\alpha_\mu$). Because R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ does not appear in T-dual transformations, we will find its T-dual under some assumptions.

5.1 T-dual NS–NS background fields $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$

Requiring that the T-dual generalized metric ${}_a\mathcal{H}_{MN}$ has the same form as the initial one $\mathcal{H}_{MN}$ (3.13) but in terms of the T-dual fields

$${}_a\mathcal{H}_{MN} = \begin{pmatrix} {}_aG_E^{\mu\nu} & -2({}_aB\,{}_aG^{-1})^\mu{}_\nu \\ 2({}_aG^{-1}{}_aB)_\mu{}^\nu & ({}_aG^{-1})_{\mu\nu}\end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

and using Eq. (4.11), one finds expressions for the NS–NS T-dual background fields ${}_a\Pi_\pm^{\mu\nu}$ in terms of the initial ones,

$${}_a\Pi_\pm^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde g^{-1}\beta_1 D^{-1}\gamma - A^{-1}(\tilde\beta\mp\frac12) & \frac12 A^{-1}g^T - 2\tilde g^{-1}\beta_1 D^{-1}(\bar\beta^T\mp\frac12) \\ \frac12 D^{-1}\gamma - 2\bar\gamma^{-1}\beta_1^T A^{-1}(\tilde\beta\mp\frac12) & \bar\gamma^{-1}\beta_1^T A^{-1}g^T - D^{-1}(\bar\beta^T\mp\frac12)\end{pmatrix}, \tag{5.2}$$

where γ and $\bar\gamma$ are defined in (A.4), g and $\tilde g$ in (A.5), while β_1, $\tilde\beta$ and $\bar\beta$ are defined in (A.7). The quantities A and D are given in (A.11) and (A.13), respectively. In more compact form we have

$${}_a\Pi_\pm^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2}\hat\theta_\mp^{ab} & \kappa\hat\theta_\mp^{ab}\Pi_{\pm bi} \\ -\kappa\Pi_{\pm ib}\hat\theta_\mp^{ba} & \Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ia}\hat\theta_\mp^{ab}\Pi_{\pm bj}\end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

where $\hat\theta_\pm^{ab}$ has been defined in (A.9). Details regarding the derivation of the Eqs. (5.2) and (5.3) are given in Ref. [35]. Reading the block components we obtained the NS–NS T-dual background fields in the flat background after dualization along the directions x^a, $(a = 0, 1, \ldots, d-1)$

$${}_a\Pi_\pm^{ab} = \frac{\kappa}{2}\hat\theta_\mp^{ab}, \quad {}_a\Pi^a_{\pm i} = \kappa\hat\theta_\mp^{ab}\Pi_{\pm bi}, \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} {}_a\Pi_{\pm i}{}^a &= -\kappa\Pi_{\pm ib}\hat\theta_\mp^{ba}, \\ {}_a\Pi_{\pm ij} &= \Pi_{\pm ij} - 2\kappa\Pi_{\pm ia}\hat\theta_\mp^{ab}\Pi_{\pm bj}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

These are just the Eqs. (2.67)–(2.69). The symmetric and antisymmetric parts of these expressions are the T-dual metric and T-dual Kalb–Ramond field, which are in full agreement with the Refs. [9,20].

5.2 T-dual NS–R background fields Ψ^α_μ, $\bar\Psi^\alpha_\mu$

Let us find the form of T-dual NS–R background fields, ${}_a\Psi^{\alpha a}$, ${}_a\Psi^\alpha_i$, ${}_a\bar\Psi^{\alpha a}$ and ${}_a\bar\Psi^\alpha_i$. The T-dual current ${}_aJ_{\pm M}$ (4.12) should have the same form as the initial one, Eq. (3.14), but in terms of the T-dual background fields

$$\begin{pmatrix} 2({}_a\Pi_\pm\,{}_aG^{-1})^a{}_b\ ({}_aJ)^b_\pm + 2({}_a\Pi_\pm\,{}_aG^{-1})^{ai}\ ({}_aJ)_{\pm i} \\ 2({}_a\Pi_\pm\,{}_aG^{-1})_{ia}\ ({}_aJ)^a_\pm + 2({}_a\Pi_\pm\,{}_aG^{-1})_i{}^j\ ({}_aJ)_{\pm j} \\ -({}_aG^{-1})_{ab}\ ({}_aJ)^b_\pm - ({}_aG^{-1})_a{}^i\ ({}_aJ)_{\pm i} \\ -({}_aG^{-1})^i{}_a\ ({}_aJ)^a_\pm - ({}_aG^{-1})^{ij}\ ({}_aJ)_{\pm j}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(G^{-1})^{a\mu}J_{\pm\mu} \\ 2(\Pi_\pm G^{-1})_i{}^\mu J_{\pm\mu} \\ 2(\Pi_\pm G^{-1})_a{}^\mu J_{\pm\mu} \\ -(G^{-1})^{i\mu}J_{\pm\mu}\end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

On the left-hand side of this equation we split the index μ in a and i components because in the T-dual picture the index a has a different position, it is now up. T-dual currents are written between the brackets to make a distinction between a left subscript a denoting partial T-dualization and summation indices in the subspace spanned by x^a.

We can obtain the information about T-dual NS–R background fields from the lower D components of the above equation. In order to find the solution of these equations it is more practical to rewrite them using the block-wise form of matrices given in the appendix and Ref. [35],

$$-\tilde{g}_{ab}\ ({}_aJ)^b_\pm + 2(\beta_1)_a{}^i\ ({}_aJ)_{\pm i}$$
$$= 2\left(\tilde{\beta} \pm \frac{1}{2}\right)_a{}^b J_{\pm b} + 2(\beta_1)_a{}^i J_{\pm i},$$
$$-2(\beta_1^T)^i{}_b\ ({}_aJ)^b_\pm + \bar{\gamma}^{ij}\ ({}_aJ)_{\pm j} = \gamma^{ia}\ J_{\pm a} + \bar{\gamma}^{ij} J_{\pm j}. \tag{5.7}$$

From Eq. (3.18) of [35]

$$({}_aG^{-1})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ab} & -2(BG^{-1})_a{}^j \\ 2(G^{-1}B)^i{}_b & (G^{-1})^{ij} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \tilde{g} & -2\beta_1 \\ -2\beta_1^T & \bar{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

(A.4) and (A.7), we find the components of ${}_aG^{-1}$, G^{-1} and BG^{-1}, respectively. In the first equation on right-hand side for $(\Pi_\pm G^{-1})_a{}^i$ just stands for $(\beta_1)_a{}^i$ because $\delta_a{}^i = 0$.

The difference

$$({}_aJ)_{\pm i} - J_{\pm i} = (\bar{\gamma}^{-1})_{ij}\left[\gamma^{ja} J_{\pm a} + 2(\beta_1^T)^j{}_b\ ({}_aJ)^b_\pm\right], \tag{5.9}$$

obtained from the second equation, we put in the first equation, which produces

$$2\left[\left(\tilde{\beta} \pm \frac{1}{2}\right) - \beta_1\bar{\gamma}^{-1}\gamma\right]_a{}^b J_{\pm b}$$
$$= -\left(\tilde{g} - 4\beta_1\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T\right)_{ab}\ {}_aJ^b_\pm. \tag{5.10}$$

From the definition of the quantity A_{ab} (A.11) we get

$$({}_aJ)^b_\pm = 2\left[-A^{-1}(\tilde{\beta} \pm \frac{1}{2}) + A^{-1}\beta_1\bar{\gamma}^{-1}\gamma\right]^{bc} J_{\pm c}. \tag{5.11}$$

Using the expression $A_{ab} = \hat{g}_{ab}$ (proved in [35]) and Eq. (A.12), we recognize the ab block component of Eq. (5.2). Therefore, with the help of (5.3) it is easy to see that

$$({}_aJ)^b_\pm = 2\ {}_a\Pi^{bc}_\mp J_{\pm c} = \kappa\ \hat{\theta}^{bc}_\pm J_{\pm c}. \tag{5.12}$$

Note that now the T-dual current ${}_aJ^{\hat{\mu}}_\pm$ is of the form

$${}_aJ^{\hat{\mu}}_\pm = \pm\frac{2}{\kappa}\ {}_a\Psi^{\alpha\hat{\mu}}_\pm\ {}_a\pi_{\pm\alpha}, \tag{5.13}$$

where

$${}_a\Psi^{\alpha\hat{\mu}}_+ \equiv {}_a\Psi^{\alpha\hat{\mu}}, \quad {}_a\Psi^{\alpha\hat{\mu}}_- \equiv {}_a\bar{\Psi}^{\alpha\hat{\mu}}, \quad {}_a\pi_{+\alpha} \equiv \pi_\alpha,$$
$${}_a\pi_{-\alpha} \equiv {}^\bullet\bar{\pi}_\alpha, \tag{5.14}$$

and as before

$$J_{\pm\mu} = \pm\frac{2}{\kappa}\Psi^\alpha_{\pm\mu}\pi_{\pm\alpha}. \tag{5.15}$$

Therefore, the a components of the T-dual NS–R fields are of the form

$${}_a\Psi^{\alpha a} = \kappa\hat{\theta}^{ab}_+\Psi^\alpha_b, \quad {}_a\bar{\Psi}^{\alpha a} = \kappa\ {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\hat{\theta}^{ab}_-\bar{\Psi}^\beta_b. \tag{5.16}$$

Substituting (5.11) into (5.9) we obtain

$$({}_aJ)_{\pm i} - J_{\pm i} = \left(\bar{\gamma}^{-1} + 4\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T A^{-1}\beta_1\bar{\gamma}^{-1}\right)_{ij}\gamma^{jb}J_{\pm b}$$
$$-4\left[\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T A^{-1}(\tilde{\beta} \pm \frac{1}{2})\right]_i{}^a J_{\pm a}. \tag{5.17}$$

With the help of (A.13) Eq. (5.17) transforms into

$$({}_aJ)_{\pm i} - J_{\pm i}$$
$$= 2\left[\frac{1}{2}D^{-1}\gamma - 2\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T A^{-1}\left(\tilde{\beta} \pm \frac{1}{2}\right)\right]_i{}^a J_{\pm a}. \tag{5.18}$$

From the ${}_i{}^a$ component of (5.2) and (5.3) we finally have

$$({}_aJ)_{\pm i} = J_{\pm i} - 2\kappa\Pi_{\mp ib}\hat{\theta}^{ba}_\pm J_{\pm a}. \tag{5.19}$$

As in the previous case, using the expressions for the currents (5.13) and (5.15), the final form of the T-dual fields is

$${}_a\Psi^\alpha_i = \Psi^\alpha_i - 2\kappa\Pi_{-ib}\hat{\theta}^{ba}_+\Psi^\alpha_a,$$
$${}_a\bar{\Psi}^\alpha_i = {}_a\Omega^\alpha{}_\beta(\bar{\Psi}^\beta_i - 2\kappa\Pi_{+ib}\hat{\theta}^{ba}_-\bar{\Psi}^\beta_a). \tag{5.20}$$

Equations (5.16) and (5.20) are in full agreement with the results from Ref. [9] given by Eqs. (2.70) and (2.71).

The upper D components of Eq. (5.6) produce the same result for T-dual background fields.

5.3 T-dual R–R field strength $F^{\alpha\beta}$

Using the relations ${}_a\mathcal{H} = \mathcal{T}^a\mathcal{H}\mathcal{T}^a$ and ${}_aJ_\pm = \mathcal{T}^aJ_\pm$ we obtained the form of the NS–NS and NS–R T-dual background fields of type II superstring theory. But we know from the Buscher T-dualization procedure that the T-dual R–R field strength ${}_aF^{\alpha\beta}$ has the form given in Eq. (2.72). In this subsection we will derive this relation within the double space framework.

The R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ appears in the action (2.13) coupled with the fermionic momenta π_α and $\bar{\pi}_\alpha$ along which we do not perform T-dualization. Therefore, we did not double these variables. It is an analog of the ij-term in approach of Refs. [27–29] where x^i coordinates are not doubled. Consequently, as in [27–29] we should make some assumptions. Let us suppose that the fermionic term $L(\pi_\alpha, \bar{\pi}_\alpha)$ is symmetric under exchange of the R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ with its T-dual ${}_aF^{\alpha\beta}$

$$L = e^{\frac{\Phi}{2}}\pi_\alpha\ F^{\alpha\beta}\bar{\pi}_\beta + e^{\frac{{}_a\Phi}{2}}\ {}_a\pi_\alpha\ {}_aF^{\alpha\beta}\ {}_a\bar{\pi}_\beta \equiv \mathcal{L} + {}_a\mathcal{L}, \tag{5.21}$$

for some $F^{\alpha\beta}$ and ${}_aF^{\alpha\beta}$. This term should be invariant under the T-dual transformation

$${}_a\mathcal{L} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}. \tag{5.22}$$

Taking into account the fact that two successive T-dualizations are the identity transformation, we obtain from (5.22)

$$\mathcal{L} = {}_a\mathcal{L} + {}_a\Delta\mathcal{L}. \tag{5.23}$$

Combining the last two relations we get

$$_a\Delta\mathcal{L} = -\Delta\mathcal{L}. \tag{5.24}$$

If $\Delta\mathcal{L}$ has the form $\Delta\mathcal{L} = \pi_\alpha\, \Delta^{\alpha\beta}\bar{\pi}_\beta$ and consequently $_a\Delta\mathcal{L} = {}_a\pi_\alpha\, {}_a\Delta^{\alpha\beta}\, {}_a\bar{\pi}_\beta$, then with the help of the first relation of Eq. (2.48) we obtain the condition for $\Delta^{\alpha\beta}$

$$_a\Delta^{\alpha\beta} = -\,\Delta^{\alpha\gamma}\, {}_a\Omega_\gamma{}^\beta. \tag{5.25}$$

Therefore, we should find the combination of background fields with two upper spinor indices which under T-dualization transforms as in (5.25). Using the expression for the NS–R fields (2.70) and the equation $({}_a\hat{\theta}_\pm)_{ab} = \frac{2}{\kappa}\Pi_{\mp ab} = \frac{1}{\kappa^2}(\hat{\theta}_\pm^{-1})_{ab}$ [see the T-dual of (5.4) and (A.10)], it is easy to check that there are D different solutions,

$$\Delta_d^{\alpha\beta} = c\Psi_a^\alpha \hat{\theta}_-^{ab}\bar{\Psi}_b^\beta, \tag{5.26}$$

where $d = 1, 2, \dots D$ and c is an arbitrary constant. Consequently, when we T-dualize d dimensions x^a ($a = 0, 1, \dots d-1$), from (5.22) we can conclude that the T-dual R–R field strength has the form

$$e^{\frac{a\Phi}{2}}\, {}_aF^{\alpha\beta} = \left(e^{\frac{\Phi}{2}}F^{\alpha\gamma} + c\Psi_a^\alpha\hat{\theta}_-^{ab}\bar{\Psi}_b^\gamma\right){}_a\Omega_\gamma{}^\beta. \tag{5.27}$$

For $c = 4\kappa$ we obtain the agreement with Eq. (2.72). Note that the fermionic term $L_d(\pi_\alpha, \bar{\pi}_\alpha)$ depends on d, the number of directions along which we perform T-duality, just in Refs. [27–29].

6 Conclusion

In this article we showed that the new interpretation of the bosonic T-dualization procedure in the double space formalism offered in [35,36] is also valid in the case of type II superstring theory. We used the ghost free action of type II superstring theory in a pure spinor formulation in the approximation of quadratic terms and constant background fields. One can obtain this action from the action (2.7), which could be considered as an expansion in powers of fermionic coordinates. In the first part of the analysis we neglect all terms in the action containing powers of θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$. This approximation is justified by the fact that the action is a result of an iterative procedure in which every step results from the previous one. Later, when we discuss proper fermionic variables, taking higher power terms we restore supersymmetric invariants $(\Pi_\pm^\mu, d_\alpha, \bar{d}_\alpha)$ as variables instead of $\partial_\pm x^\mu$, π_α and $\bar{\pi}_\alpha$.

We introduced the double space coordinate $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$ adding to all bosonic initial coordinates, x^μ, the T-dual ones, y_μ. Then we rewrote the T-dual transformation laws (3.8) in terms of double space variables (3.12) introducing the generalized metric $\mathcal{H}_{MN}$ and the current $J_{\pm M}$. The generalized metric depends only on the NS–NS background fields of the initial theory. The current $J_{\pm M}$ contains fermionic momenta π_α and $\bar{\pi}_\alpha$, along which we do not make a T-dualization, and it depends also on NS–R background fields. The R–R background fields do not appear in T-dual transformation laws.

The coordinate index μ is split in $a = (0, 1, \dots d-1)$ and $i = (d, d+1, \dots D-1)$, where index a marks subsets of the initial and T-dual coordinates, x^a and y_a, along which we make T-dualization. T-dualization is realized as permutation of the subsets x^a and y_a in the double space coordinate Z^M. The main require is that T-dual double space coordinates $_aZ^M = (\mathcal{T}^a)^M{}_N Z^N$ satisfy the transformation law of the same form as the initial coordinates Z^M. From this condition we found the T-dual generalized metric $_a\mathcal{H}_{MN}$ and the T-dual current $_aJ_{\pm M}$. Because the initial and T-dual theory are physically equivalent, $_a\mathcal{H}_{MN}$ and $_aJ_{\pm M}$ should have the same form as the initial ones, $\mathcal{H}$ and $J_{\pm M}$, but in terms of the T-dual background fields. It produces the form of the NS–NS and NS–R T-dual background fields in terms of the initial ones which are in full accordance with the results obtained by the Buscher T-dualization procedure [9,10].

The supersymmetry case is not a simple generalization of the bosonic one, but it requires some new interesting steps. The origin of the problem is the different T-duality transformations of the world-sheet chirality sectors. It produces two possible sets of vielbeins in the T-dual theory with the same T-dual metric. These vielbeins are related by a particular local Lorentz transformation which depends on T-duality transformation and of which the determinant is $(-1)^d$, where d is the number of T-dualized coordinates. Therefore, when we perform T-dualization along an odd number of coordinates then such transformation contains a parity transformation. Consistency of T-duality with supersymmetry requires changing one of two spinor sectors. We redefine the bar spinor coordinates, $_a\bar{\theta} \to {}^\bullet_a\bar{\theta}^\alpha = {}_a\Omega^\alpha{}_\beta\bar{\theta}^\beta$, and the variable $_a\bar{\pi}_\alpha$, $_a\bar{\pi}_\alpha \to {}^\bullet_a\bar{\pi}_\alpha = {}_a\Omega_\alpha{}^\beta\bar{\pi}_\beta$. As a consequence the bar NS–R and R–R background fields include $_a\Omega$ in their T-duality transformations. For an odd number of coordinates d along which T-dualization is performed, $_a\Omega$ changes the chirality of the bar gravitino $\bar{\Psi}_\mu^\alpha$ and the chirality condition for $F^{\alpha\beta}$. We need it to relate type IIA and type IIB theories.

The transformation law (3.12) induces the consistency condition which can be considered as equation of motion of the double space action (3.21). It contains an arbitrary term depending on the undualized variables $L(\pi_\alpha, \bar{\pi}_\alpha)$. This is in analogy with the term $\partial_+x^i\Pi_{+ij}\partial_-x^j$ in the approach presented in Refs. [27–29]. Therefore, to obtain the T-dual transformation of the R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ we should make some additional assumptions. Supposing that the term

$L(\pi_\alpha, \bar{\pi}_\alpha)$ is T-dual invariant and taking into account that two successive T-dualizations act as the identity operator, we found the form of the T-dual R–R field strength up to one arbitrary constant c. For $c = 4\kappa$ we get the T-dual R–R field strength ${}_a F^{\alpha\beta}$ as in the Buscher procedure [9].

A T-duality transformation of the R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ has two contributions in the form of square roots. The contribution of the dilaton produces the term $\sqrt{|\prod_{i=1}^d G_{a_i a_i}|}$. On the other hand the contribution of the spinorial representation of a Lorentz transformation ${}_a\Omega$ contains the same expression without the absolute value $i^d\sqrt{\prod_{i=1}^d G_{a_i a_i}}$. Therefore, the T-dual R–R field strength ${}_a F^{\alpha\beta}$, besides a rational expression, contains the expression $i^d\sqrt{\text{sign}(\prod_{i=1}^d G_{a_i a_i})}$ (2.89). If we T-dualize along the time-like direction ($G_{00} > 0$), the square root does not produce an imaginary unit i, not canceling the one in front of the square root. Therefore, T-dualization along the time-like direction maps type II superstring theories to type II* ones [37].

The successive T-dualizations make a group called the T-duality group. In the case of type II superstring T-duality, transformations are performed by the same matrices $\mathcal{T}^a$ as in the bosonic string case [35,36]. Consequently, the corresponding T-duality group is the same.

If we want to find a T-dual transformation of $F^{\alpha\beta}$ without any assumptions, we should follow the approach of [35,36] and, besides all bosonic coordinates x^μ, double also all fermionic variables π_α and $\bar{\pi}_\alpha$. In other words, besides bosonic T-duality we should also consider fermionic T-duality [53–59].

Funded by SCOAP^3.

Appendix A: Block-wise expressions for background fields

In order to simplify notation we will introduce notations for the component fields following Ref. [35].

For block-wise matrices there is a rule for inversion,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

For the metric tensor and the Kalb–Ramond background fields we define

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{ab} & G_{aj} \\ G_{ib} & \bar{G}_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{G} & G^T \\ G & \bar{G} \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

and

$$B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{ab} & b_{aj} \\ b_{ib} & \bar{b}_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{b} & -b^T \\ b & \bar{b} \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

We also define the notation for inverse of the metric,

$$(G^{-1})^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma}^{ab} & \gamma^{aj} \\ \gamma^{ib} & \bar{\gamma}^{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & \gamma^T \\ \gamma & \bar{\gamma} \end{pmatrix}, \tag{A.4}$$

and for the effective metric

$$G^E_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4B_{\mu\rho}(G^{-1})^{\rho\sigma} \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{ab} & g_{aj} \\ g_{ib} & \bar{g}_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{g} & g^T \\ g & \bar{g} \end{pmatrix}. \tag{A.5}$$

Note that because $G^{\mu\nu}$ is the inverse of $G_{\mu\nu}$ we have

$$\begin{aligned} &\gamma = -\bar{G}^{-1}G\tilde{\gamma} = -\bar{\gamma}G\tilde{G}^{-1}, \\ &\gamma^T = -\tilde{G}^{-1}G^T\bar{\gamma} = -\tilde{\gamma}G^T\bar{G}^{-1}, \\ &\tilde{\gamma} = (\tilde{G} - G^T\bar{G}^{-1}G)^{-1}, \quad \bar{\gamma} = (\bar{G} - G\tilde{G}^{-1}G^T)^{-1}, \\ &\tilde{G}^{-1} = \tilde{\gamma} - \gamma^T\bar{\gamma}^{-1}\gamma, \quad \bar{G}^{-1} = \bar{\gamma} - \gamma\tilde{\gamma}^{-1}\gamma^T. \end{aligned} \tag{A.6}$$

It is also useful to introduce a new notation for the expression

$$(BG^{-1})_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} \tilde{b}\tilde{\gamma} - b^T\gamma & \tilde{b}\gamma^T - b^T\bar{\gamma} \\ b\tilde{\gamma} + \bar{b}\gamma & b\gamma^T + \bar{b}\bar{\gamma} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\beta} & \beta_1 \\ \beta_2 & \bar{\beta} \end{pmatrix}. \tag{A.7}$$

We denote by a hat expressions similar to the effective metric (A.5) and non-commutativity parameters but with all contributions from the ab subspace,

$$\hat{g}_{ab} = (\tilde{G} - 4\tilde{b}\tilde{G}^{-1}\tilde{b})_{ab}, \quad \hat{\theta}^{ab} = -\frac{2}{\kappa}(\hat{g}^{-1}\tilde{b}\tilde{G}^{-1})^{ab}. \tag{A.8}$$

Note that $\hat{g}_{ab} \neq \tilde{g}_{ab}$ because $\tilde{g}_{ab}$ is a projection of $g_{\mu\nu}$ on the subspace ab. It is extremely useful to introduce background field combinations,

$$\begin{aligned} &\Pi_{\pm ab} = B_{ab} \pm \frac{1}{2}G_{ab} \\ &\hat{\theta}^{ab}_\pm = -\frac{2}{\kappa}(\hat{g}^{-1}\tilde{\Pi}_\pm\tilde{G}^{-1})^{ab} = \hat{\theta}^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\hat{g}^{-1})^{ab}, \end{aligned} \tag{A.9}$$

which are inverses to each other

$$\hat{\theta}^{ac}_\pm \Pi_{\mp cb} = \frac{1}{2\kappa}\delta^a_b. \tag{A.10}$$

The quantity A_{ab} is defined as

$$A_{ab} = (\tilde{g} - 4\beta_1\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T)_{ab}. \tag{A.11}$$

One can prove the relation [35]

$$(\tilde{g}^{-1}\beta_1 D^{-1})^a{}_i = (\hat{g}^{-1}\beta_1\bar{\gamma}^{-1})^a{}_i, \tag{A.12}$$

where D^{ij} is defined in Eq. (3.21) of [35],

$$D^{ij} = (\bar{\gamma} - 4\beta_1^T \tilde{g}^{-1}\beta_1)^{ij},$$
$$(D^{-1})_{ij} = \left(\bar{\gamma}^{-1} + 4\bar{\gamma}^{-1}\beta_1^T A^{-1}\beta_1\bar{\gamma}^{-1}\right)_{ij}. \qquad \text{(A.13)}$$

References

1. K. Becker, M. Becker, J. Schwarz, *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007)
2. B. Zwiebach, *A First Course in String Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004)
3. J. Polchinski, *String Theory*, vol. II (Cambridge University Press, Cambridge, 1998)
4. T. Buscher, Phys. Lett. B **194**, 59 (1987)
5. T. Buscher, Phys. Lett. **201**, 466 (1988)
6. M. Roček, E. Verlinde, Nucl. Phys. B **373**, 630 (1992)
7. A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, Phys. Rep. **244**, 77 (1994)
8. E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, J. Barbon, Y. Lozano, Nucl. Phys. B **415**, 71 (1994)
9. B. Nikolić, B. Sazdović, Nucl. Phys. B **836**, 100 (2010)
10. D.S. Berman, D.C. Thompson, Phys. Rep. **566**, 1–60 (2014)
11. D. Lust, JHEP **12**, 084 (2010)
12. D. Andriot, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, JHEP **06**, 021 (2013)
13. D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Lust, P. Patalong, Phys. Rev. Lett. **108**, 261602 (2012)
14. D. Lüst, in *Proceedings of the Corfu Summer Institute 2011 School and Workshops on Elementary Particle Physics and Gravity*. September 4–18, 2011. Corfu, Greece. arXiv:1205.0100 [hep-th]
15. R. Blumenhagen, A. Deser, D. Luest, E. Plauschinn, F. Rennecke, J. Phys. A **44**, 385401 (2011)
16. C. Condeescu, I. Florakis, D. Luest, JHEP **04**, 121 (2012)
17. J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, JHEP **10**, 085 (2005)
18. A. Dabholkar, C. Hull, JHEP **05**, 009 (2006)
19. Lj. Davidović, B. Sazdović, EPJ C **74**, 2683 (2014)
20. Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, EPJ C **75**, 576 (2015)
21. Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, EPJ C **74**, 2734 (2014)
22. M. Duff, Nucl. Phys. B **335**, 610 (1990)
23. A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B **242**, 163 (1990)
24. A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **350**, 395 (1991)
25. W. Siegel, Phys. Rev. D **48**, 2826 (1993)
26. W. Siegel, Phys. Rev. D **47**, 5453 (1993)
27. C.M. Hull, JHEP **10**, 065 (2005)
28. C.M. Hull, JHEP **10**, 057 (2007)
29. C.M. Hull, JHEP **07**, 080 (2007)
30. D.S. Berman, M. Cederwall, M.J. Perry, JHEP **09**, 066 (2014)
31. D.S. Berman, C.D.A. Blair, E. Malek, M.J. Perry, Int. J. Mod. Phys. A **29**(15), 1450080 (2014)
32. C.D.A. Blair, E. Malek, A.J. Routh, Class. Quantum Gravity **31**(20), 205011 (2014)
33. C.M. Hull, R.A. Reid-Edwards, JHEP **09**, 014 (2009)
34. O. Hohm, B. Zwiebach, JHEP **11**, 075 (2014)
35. B. Sazdović, T-duality as coordinates permutation in double space. arXiv:1501.01024. doi:10.1088/1674-1137/41/5/053101
36. B. Sazdović, JHEP **08**, 055 (2015)
37. C.M. Hull, JHEP **07**, 021 (1998)
38. N. Berkovits, ICTP Lectures on Covariant Quantisation of Superstrings, arXiv:hep-th/0209059
39. P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, JHEP **10**, 054 (2002)
40. P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, JHEP **11**, 004 (2002)
41. P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, Adv. Theor. Math. Phys. **7**, 499 (2003)
42. P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **553**, 96 (2003)
43. J. de Boer, P.A. Grassi, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B **574**, 98 (2003)
44. N. Berkovits, P. Howe, Nucl. Phys. B **635**, 75 (2002)
45. P.A. Grassi, L. Tamassia, JHEP **07**, 071 (2004)
46. S.F. Hassan, Nucl. Phys. B **568**, 145 (2000)
47. R. Benichou, G. Policastro, J. Troost, Phys. Lett. B **661**, 129 (2008)
48. M.J. Duff, TASI Lectures on Branes, Black Holes and Anti-de Sitter Space, arXiv:hep-th/9912164v2
49. M.J. Duff, R.R. Khuri, J.X. Lu, Phys. Rep. **259**, 213 (1995)
50. E. Kiritsis, *Introduction to Superstring Theory* (Leuven University Press, Leuven, 1998). arXiv:hep-th/9709062
51. B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Lett. B **666**, 400 (2008)
52. D.C. Thompson, *T-Duality Invariant Approaches to String Theory*, PhD thesis. arXiv:1012.4393
53. N. Berkovits, J. Maldacena, JHEP **09**, 062 (2008)
54. K. Sfetsos, K. Siampos, D.C. Thompson, Class. Quantum Gravity **28**, 055010 (2011)
55. I. Bakhmatov, D.S. Berman, Nucl. Phys. B **832**, 89–108 (2010)
56. N. Beisert, R. Ricci, A.A. Tseytlin, M. Wolf, Phys. Rev. D **78**, 126004 (2008)
57. R. Ricci, A.A. Tseytlin, M. Wolf, JHEP **12**, 082 (2007)
58. B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Rev. D **84**, 065012 (2011)
59. B. Nikolić, B. Sazdović, JHEP **06**, 101 (2012)
60. A. Giveon, M. Roček, Nucl. Phys. B **421**, 173 (1994)

Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Nuclear Physics B 917 (2017) 105–121

NUCLEAR PHYSICS B

www.elsevier.com/locate/nuclphysb

Fermionic T-duality in fermionic double space ☆

B. Nikolić *, B. Sazdović

Institute of Physics Belgrade, University of Belgrade, Pregrevica 118, 11080 Belgrade, Serbia

Received 9 September 2016; received in revised form 26 January 2017; accepted 9 February 2017
Available online 13 February 2017
Editor: Stephan Stieberger

Abstract

In this article we offer the interpretation of the fermionic T-duality of the type II superstring theory in double space. We generalize the idea of double space doubling the fermionic sector of the superspace. In such doubled space fermionic T-duality is represented as permutation of the fermionic coordinates θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ with the corresponding fermionic T-dual ones, ϑ_α and $\bar{\vartheta}_\alpha$, respectively. Demanding that T-dual transformation law has the same form as initial one, we obtain the known form of the fermionic T-dual NS–R and R–R background fields. Fermionic T-dual NS–NS background fields are obtained under some assumptions. We conclude that only symmetric part of R–R field strength and symmetric part of its fermionic T-dual contribute to the fermionic T-duality transformation of dilaton field and analyze the dilaton field in fermionic double space. As a model we use the ghost free action of type II superstring in pure spinor formulation in approximation of constant background fields up to the quadratic terms.

1. Introduction

Two theories T-dual to one another can be viewed as being physically identical [1,2]. T-duality presents an important tool which shows the equivalence of different geometries and topologies. The useful T-duality procedure was first introduced by Buscher [3].

☆ Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.
* Corresponding author.
E-mail addresses: bnikolic@ipb.ac.rs (B. Nikolić), sazdovic@ipb.ac.rs (B. Sazdović).

http://dx.doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2017.02.003

Mathematical realization of T-duality is given by Buscher T-dualization procedure [3], which is considered as standard one. There are also other frameworks in which we can represent T-dualization which should agree with the Buscher procedure. It is double space formalism which was the subject of the articles about twenty years ago [4–8]. Double space is spanned by coordinates $Z^M = (x^\mu \quad y_\mu)^T$ $(\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1)$, where x^μ and y_μ are the coordinates of the D-dimensional initial and T-dual space–time, respectively. Interest for this subject emerged recently with papers [9–13], where T-duality along some subset of d coordinates is considered as $O(d, d)$ symmetry transformation and [14,15], where it is considered as permutation of d initial with corresponding d T-dual coordinates.

Until recently only T-duality along bosonic coordinates has been considered. Analyzing the gluon scattering amplitudes in $N = 4$ super Yang–Mills theory, a new kind of T-dual symmetry, fermionic T-duality, was discovered [16,17]. It is a part of the dual superconformal symmetry which should be connected to integrability and it is valid just at string tree level. Mathematically, fermionic T-duality is realized within the same procedure as bosonic one, except that dualization is performed along fermionic variables. So, it can be considered as a generalization of Buscher T-duality. Fermionic T-duality consists in certain non-local redefinitions of the fermionic variables of the superstring mapping a supersymmetric background to another supersymmetric background. In Refs. [16,17] it was shown that fermionic T-duality maps gluon scattering amplitudes in the original theory to an object very close to Wilson loops in the dual one. Calculation of gluon scattering amplitudes in the initial theory is equivalent to the calculation of Wilson loops in fermionic T-dual theory. Generalizing the idea of double space to the fermionic case we would get fermionic double space in which fermionic T-duality is a symmetry [18] which exchanges scattering amplitudes and Wilson loops. Fermionic double space can be also successfully applied in random lattice [19], where doubling of the supercoordinate was done. Relation between fermionic T-duality and open string noncommutativity was considered in Ref. [20].

Let us explain our motivation for fermionic T-duality. It is well known that T-duality is important feature in understanding the M-theory. In fact, five consistent superstring theories are connected by web of T and S dualities. We are going to pay attention to the T-duality, hoping that S-duality (which can be understood as transformation of dilaton background field also) can be later successfully incorporated into our procedure. If we start with arbitrary (of five consistent superstring) theory and find all corresponding T-dual theories we can achieve any of other four consistent superstring theories. But to obtain formulation of M-theory it is not enough. We must construct one theory which contains the initial theory and all corresponding T-dual ones.

In the bosonic case (which is substantially simpler that supersymmetric one) we have succeeded to realize such program. In Refs. [14,15] we doubled all bosonic coordinates and showed that such theory contained the initial and all corresponding T-dual theories. We can connect arbitrary two of these theories just replacing some initial coordinates x^a with corresponding T-dual ones y_a. This is equivalent with T-dualization along coordinates x^a. So, introducing double space T-duality ceases to be transformation which connects two physically equivalent theories but it becomes symmetry transformation in extended space with respect to permutation group. We proved this in the bosonic string case both for constant and for weakly curved background with linear dependence on coordinates.

Unfortunately, this is not enough for construction of M-theory, because the T-duality for superstrings is much more complicated then in the bosonic case [21]. In Ref. [22] we have tried to extend such approach to the type II theories. In fact, doubling all bosonic coordinates we have unified types IIA, IIB as well as type $II^\star$ [23] (obtained by T-dualization along time-like direction) theories. There is an incompleteness in such approach. Doubling all bosonic coordinates, by simple permutations of initial with corresponding T-dual coordinates, we obtained all T-dual background fields except T-dual R–R field strength $F^{\alpha\beta}$. To obtain ${}_aF^{\alpha\beta}$ (the field strength after T-dualization along coordinates x^a) we need to introduce some additional assumptions. The explanation is that R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ appears coupled with fermionic momenta π_α and $\bar\pi_\alpha$ along which we did not performed T-dualization and consequently we did not double these variables. It is an analogue of ij-term in approach of Refs. [9,10] where x^i coordinates are not doubled.

Therefore, in the first step of our approach to the formulation of M-theory (unification of types II theories) we must include T-dualization along fermionic variables (π_α and $\bar\pi_\alpha$ in particular case). It means that we should doubled these fermionic variables, also. The present article represents a necessary step for understanding T-dualization along all fermionic coordinates in fermionic double space. We expect that final step in construction of M-theory will be unification of all theories obtained after T-dualization along all bosonic and all fermionic variables [18,19]. In that case we should double all coordinates in superspace, anticipating that some superpermutation will connect arbitrary two of our five consistent supersymmetric string theories.

In this article we are going to double fermionic sector of type II theories adding to the coordinates θ^α and $\bar\theta^\alpha$ their fermionic T-duals, ϑ_α and $\bar\vartheta_\alpha$, where index α counts independent real components of the spinors, $\alpha = 1, 2, \dots, 16$. Rewriting T-dual transformation laws in terms of the double coordinates, $\Theta^A = (\theta^\alpha, \vartheta_\alpha)$ and $\bar\Theta^A = (\bar\theta^\alpha, \bar\vartheta_\alpha)$, we define the "fermionic generalized metric" $\mathcal{F}_{AB}$ and the generalized currents $\bar{\mathcal{J}}_{+A}$ and $\mathcal{J}_{-A}$. The permutation matrix $\mathcal{T}^A{}_B$ exchanges $\bar\theta^\alpha$ and θ^α with their T-dual partners, $\bar\vartheta_\alpha$ and ϑ_α, respectively. From the requirement that fermionic T-dual coordinates, ${}^\star\Theta^A = \mathcal{T}^A{}_B\Theta^B$ and ${}^\star\bar\Theta^A = \mathcal{T}^A{}_B\bar\Theta^B$, have the same transformation law as initial ones, Θ^A and $\bar\Theta^A$, we obtain the expressions for fermionic T-dual generalized metric, ${}^\star\mathcal{F}_{AB} = (\mathcal{T}\mathcal{F}\mathcal{T})_{AB}$, and T-dual currents, ${}^\star\bar{\mathcal{J}}_{+A} = \mathcal{T}_A{}^B\bar{\mathcal{J}}_{+B}$ and ${}^\star\mathcal{J}_{-A} = \mathcal{T}_A{}^B\mathcal{J}_{-B}$, in terms of the initial ones. These expressions produce the expression for fermionic T-dual NS–R fields and R–R field strength. Expressions for fermionic T-dual metric and Kalb–Ramond field are obtained separately under some assumptions. We conclude that only symmetric part of R–R field strength, $F_s^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(F^{\alpha\beta} + F^{\beta\alpha})$, and symmetric part of its fermionic T-dual, ${}^\star F^s_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}({}^\star F_{\alpha\beta} + {}^\star F_{\beta\alpha})$, give contribution to the dilaton field transformation under fermionic T-duality. We also investigate the dilaton field in double space.

2. Type II superstring and fermionic T-duality

In this section we will introduce the action of type II superstring theory in pure spinor formulation and perform fermionic T-duality [16,17,20] using fermionic analogue of Buscher rules [3].

2.1. Action and supergravity constraints

In this manuscript we use the action of type II superstring theory in pure spinor formulation [24] up to the quadratic terms with constant background fields. Here we will derive the final form of the action which will be exploited in the further analysis. It corresponds to the actions used in Refs. [25–28].

The sigma model action for type II superstring of Ref. [29] is of the form

$$S = S_0 + V_{SG}\,, \tag{2.1}$$

where S_0 is the action in the flat background

$$S_0 = \int_{\Sigma} d^2\xi \left(\frac{\kappa}{2} \eta^{mn} \eta_{\mu\nu} \partial_m x^\mu \partial_n x^\nu - \pi_\alpha \partial_- \theta^\alpha + \partial_+ \bar{\theta}^\alpha \bar{\pi}_\alpha \right) + S_\lambda + S_{\bar{\lambda}} \,, \tag{2.2}$$

and it is deformed by integrated form of the massless type II supergravity vertex operator

$$V_{SG} = \int_{\Sigma} d^2\xi (X^T)^M A_{MN} \bar{X}^N \,. \tag{2.3}$$

The vectors X^M and $\bar{X}^N$ are defined as

$$X^M = \begin{pmatrix} \partial_+ \theta^\alpha \\ \Pi_+^\mu \\ d_\alpha \\ \frac{1}{2} N_+^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \quad \bar{X}^N = \begin{pmatrix} \partial_- \bar{\theta}^\alpha \\ \Pi_-^\mu \\ \bar{d}_\alpha \\ \frac{1}{2} \bar{N}_-^{\mu\nu} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

and supermatrix A_{MN} is of the form

$$A_{MN} = \begin{pmatrix} A_{\alpha\beta} & A_{\alpha\nu} & E_\alpha{}^\beta & \Omega_{\alpha,\mu\nu} \\ A_{\mu\beta} & A_{\mu\nu} & \bar{E}_\mu^\beta & \Omega_{\mu,\nu\rho} \\ E^\alpha{}_\beta & E^\alpha_\nu & \mathrm{P}^{\alpha\beta} & C^\alpha{}_{\mu\nu} \\ \Omega_{\mu\nu,\beta} & \Omega_{\mu\nu,\rho} & \bar{C}_{\mu\nu}{}^\beta & S_{\mu\nu,\rho\sigma} \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

where notation and definitions are taken from Ref. [29]. The actions for pure spinors, S_λ and $S_{\bar{\lambda}}$, are free field actions and fully decoupled from the rest of action S_0. The world sheet Σ is parameterized by $\xi^m = (\xi^0 = \tau \,, \xi^1 = \sigma)$ and $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$. Bosonic part of superspace is spanned by coordinates x^μ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots, 9$), while the fermionic one is spanned by θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, 16$). The variables π_α and $\bar{\pi}_\alpha$ are canonically conjugated momenta to θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$, respectively. All spinors are Majorana–Weyl ones, which means that each of them has 16 independent real components. Matrix with superfields generally depends on x^μ, θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$.

The superfields $A_{\mu\nu}$, $\bar{E}_\mu{}^\alpha$, $E^\alpha{}_\mu$ and $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ are known as physical superfields, while the fields given in the first column and first row are auxiliary superfields because they can be expressed in terms of the physical ones [29]. The rest ones, $\Omega_{\mu,\nu\rho}(\Omega_{\mu\nu,\rho})$, $C^\alpha{}_{\mu\nu}(\bar{C}_{\mu\nu}{}^\alpha)$ and $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$, are curvatures (field strengths) for physical superfields.

The expanded form of the vertex operator (2.3) is [29]

$$\begin{aligned} V_{SG} = \int d^2\xi \Big[& \partial_+ \theta^\alpha A_{\alpha\beta} \partial_- \bar{\theta}^\beta + \partial_+ \theta^\alpha A_{\alpha\mu} \Pi_-^\mu + \Pi_+^\mu A_{\mu\alpha} \partial_- \bar{\theta}^\alpha + \Pi_+^\mu A_{\mu\nu} \Pi_-^\nu \\ & + d_\alpha E^\alpha{}_\beta \partial_- \bar{\theta}^\beta + d_\alpha E^\alpha{}_\mu \Pi_-^\mu + \partial_+ \theta^\alpha E_\alpha{}^\beta \bar{d}_\beta + \Pi_+^\mu E_\mu{}^\beta \bar{d}_\beta + d_\alpha \mathrm{P}^{\alpha\beta} \bar{d}_\beta \\ & + \frac{1}{2} N_+^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu,\beta} \partial_- \bar{\theta}^\beta + \frac{1}{2} N_+^{\mu\nu} \Omega_{\mu\nu,\rho} \Pi_-^\rho + \frac{1}{2} \partial_+ \theta^\alpha \Omega_{\alpha,\mu\nu} \bar{N}_-^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \Pi_+^\mu \Omega_{\mu,\nu\rho} \bar{N}_-^{\nu\rho} \\ & + \frac{1}{2} N_+^{\mu\nu} \bar{C}_{\mu\nu}{}^\beta \bar{d}_\beta + \frac{1}{2} d_\alpha C^\alpha{}_{\mu\nu} \bar{N}_-^{\mu\nu} + \frac{1}{4} N_+^{\mu\nu} S_{\mu\nu,\rho\sigma} \bar{N}_-^{\rho\sigma} \Big] \,. \end{aligned} \tag{2.6}$$

The supergravity constraints are the conditions obtained as a consequence of nilpotency and (anti)holomorphicity of BRST operators $Q = \int \lambda^\alpha d_\alpha$ and $\bar{Q} = \int \bar{\lambda}^\alpha \bar{d}_\alpha$, where λ^α and $\bar{\lambda}^\alpha$ are pure spinors and d_α and $\bar{d}_\alpha$ are independent variables. Let us discuss the choice of background fields satisfying superspace equations of motion in the context of supergravity constraints which are explained in details for pure spinor formalism in Refs. [32,29].

In order to implement T-duality many restrictions should be imposed. For example, in bosonic case one should assume the existence of Killing vectors, which in fact means background fields independence on corresponding suitably selected coordinates. The idea is to avoid dependence on the coordinate x^μ and allow only dependence on the σ and τ derivatives of the coordinates, $\dot{x}^\mu$ and x'^μ. The case with explicit dependence on the coordinate requires particular attention and has been considered in Ref. [30]. Similar simplifications must be imposed in consideration of the non-commutativity of the coordinates [31,30].

A similar situation occurs in the supersymmetric case. In order to perform fermionic T-duality we must avoid explicit dependence of background fields on the fermionic coordinates θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ (fermionic coordinates are Killing spinors) and allow only dependence on the σ and τ derivatives of these coordinates. Assumption of existence of Killing spinors produces that the auxiliary superfields should be taken to be zero what can be seen from Eq. (5.5) of Ref. [29].

The right-hand side of the equations of motion for background fields (see for example [33]) is energy-momentum tensor which is generally square of field strengths. In our case physical superfields $G_{\mu\nu}$, $B_{\mu\nu}$, Φ, Ψ^α_μ and $\bar{\Psi}^\alpha_\mu$ are constant (do not depend on x^μ, θ^α, $\bar{\theta}^\alpha$) and corresponding field strengths, $\Omega_{\mu,\nu\rho}(\Omega_{\mu\nu,\rho})$, $C^\alpha{}_{\mu\nu}(\bar{C}_{\mu\nu}{}^\alpha)$ and $S_{\mu\nu,\rho\sigma}$, are zero. The only nontrivial contribution of the quadratic terms in equations of motion comes from constant field strength $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$. It can induce back-reaction to the background fields. In order to analyze this issue we will use relations from Eq. (3.6) of Ref. [29] labeled by $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

$$D_\alpha \mathrm{P}^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}(\Gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\beta \bar{C}_{\mu\nu}{}^\gamma = 0\,, \quad \bar{D}_\alpha \mathrm{P}^{\beta\gamma} - \frac{1}{4}(\Gamma^{\mu\nu})_\alpha{}^\gamma C^\beta{}_{\mu\nu} = 0\,, \tag{2.7}$$

in which derivative of $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ appears. Here

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial\theta^\alpha} + \frac{1}{2}(\Gamma^\mu\theta)_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \quad \bar{D}_\alpha = \frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^\alpha} + \frac{1}{2}(\Gamma^\mu\bar{\theta})_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\mu}\,, \tag{2.8}$$

are superspace covariant derivatives and $C^\alpha{}_{\mu\nu}$ and $\bar{C}_{\mu\nu}{}^\alpha$ are field strengths for gravitino fields Ψ^α_μ and $\bar{\Psi}^\alpha_\mu$, respectively. In order to perform fermionic T-dualization along all fermionic directions, θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$, we assume that they are Killing spinors which means

$$\frac{\partial \mathrm{P}^{\beta\gamma}}{\partial\theta^\alpha} = \frac{\partial \mathrm{P}^{\beta\gamma}}{\partial\bar{\theta}^\alpha} = 0\,. \tag{2.9}$$

Taking into account that gravitino fields, Ψ^α_μ and $\bar{\Psi}^\alpha_\mu$, are constant (corresponding field strengths are zero), from the equations (2.7) it follows

$$(\Gamma^\mu)_{\alpha\delta}\partial_\mu \mathrm{P}^{\beta\gamma} = 0\,. \tag{2.10}$$

Note that this is more general case than equation of motion for R–R field strength,

$$(\Gamma^\mu)_{\alpha\beta}\partial_\mu \mathrm{P}^{\beta\gamma} = 0,$$

given in Eq. (3.11) of Ref. [29] where there is summation over spinor indices. Our choice of constant $\mathrm{P}^{\alpha\beta}$ is consistent with this condition. It is known fact that even constant R–R field strength produces back-reaction on background fields. In order to cancel non-quadratic terms originating from back-reaction, the constant R–R field strength must satisfy additional conditions – $AdS_5 \times S_5$ coset geometry or self-duality condition.

Taking into account these assumptions there exists solution

$$\Pi^\mu_\pm \to \partial_\pm x^\mu\,, \quad d_\alpha \to \pi_\alpha\,, \quad \bar{d}_\alpha \to \bar{\pi}_\alpha\,, \tag{2.11}$$

and only nontrivial superfields take the form

$$A_{\mu\nu}=\kappa(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}+B_{\mu\nu}), \quad E^\alpha_\nu=-\Psi^\alpha_\nu, \quad \bar{E}^\alpha_\mu=\bar{\Psi}^\alpha_\mu, \quad \mathrm{P}^{\alpha\beta}=\frac{2}{\kappa}P^{\alpha\beta}=\frac{2}{\kappa}e^{\frac{\Phi}{2}}F^{\alpha\beta}, \tag{2.12}$$

where $g_{\mu\nu}$ is symmetric and $B_{\mu\nu}$ is antisymmetric tensor.

The final form of the vertex operator under these assumptions is

$$V_{SG}=\int_\Sigma d^2\xi\left[\kappa(\frac{1}{2}g_{\mu\nu}+B_{\mu\nu})\partial_+x^\mu\partial_-x^\nu-\pi_\alpha\Psi^\alpha_\mu\partial_-x^\mu+\partial_+x^\mu\bar{\Psi}^\alpha_\mu\bar{\pi}_\alpha+\frac{2}{\kappa}\pi_\alpha P^{\alpha\beta}\pi_\beta\right]. \tag{2.13}$$

Consequently, the action S is of the form

$$S=\kappa\int_\Sigma d^2\xi\left[\partial_+x^\mu\Pi_{+\mu\nu}\partial_-x^\nu+\frac{1}{4\pi\kappa}\Phi R^{(2)}\right] \tag{2.14}$$
$$+\int_\Sigma d^2\xi\left[-\pi_\alpha\partial_-(\theta^\alpha+\Psi^\alpha_\mu x^\mu)+\partial_+(\bar{\theta}^\alpha+\bar{\Psi}^\alpha_\mu x^\mu)\bar{\pi}_\alpha+\frac{2}{\kappa}\pi_\alpha P^{\alpha\beta}\bar{\pi}_\beta\right],$$

where $G_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}$ and

$$\Pi_{\pm\mu\nu}=B_{\mu\nu}\pm\frac{1}{2}G_{\mu\nu}. \tag{2.15}$$

All terms containing pure spinors vanished because curvatures are zero under our assumption that physical superfields are constant. Actions S_λ and $S_{\bar{\lambda}}$ are fully decoupled from the rest action and can be neglected in the further analysis. The action, in its final form, is ghost independent.

Here we work both with type IIA and type IIB superstring theory. The difference is in the chirality of NS–R background fields and content of R–R sector. In NS–R sector there are two gravitino fields Ψ^α_μ and $\bar{\Psi}^\alpha_\mu$ which are Majorana–Weyl spinors of the opposite chirality in type IIA and same chirality in type IIB theory. The same feature stands for the pairs of spinors $(\theta^\alpha,\bar{\theta}^\alpha)$ and $(\pi_\alpha,\bar{\pi}_\alpha)$. The R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ is expressed in terms of the antisymmetric tensors $F_{(k)}=F_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_k}$ [1]

$$F^{\alpha\beta}=\sum_{k=0}^{D}\frac{1}{k!}F_{(k)}(C\Gamma_{(k)})^{\alpha\beta}, \quad \left[\Gamma^{\alpha\beta}_{(k)}=(\Gamma^{[\mu_1\ldots\mu_k]})^{\alpha\beta}\right] \tag{2.16}$$

where

$$\Gamma^{[\mu_1\mu_2\ldots\mu_k]}\equiv\Gamma^{[\mu_1}\Gamma^{\mu_2}\ldots\Gamma^{\mu_k]}, \tag{2.17}$$

is basis of completely antisymmetrized product of gamma matrices and C is charge conjugation operator. For more technical details regarding gamma matrices see the first reference in [1].

R–R field strength satisfies the chirality condition $\Gamma^{11}F=\pm F\Gamma^{11}$, where Γ^{11} is a product of gamma matrices in $D=10$ dimensional space–time. The sign $+$ corresponds to type IIA while sign $-$ corresponds to type IIB superstring theory. Consequently, type IIA theory contains only even rank tensors $F_{(k)}$, while type IIB contains only odd rank tensors. For type IIA the independent tensors are $F_{(0)}$, $F_{(2)}$ and $F_{(4)}$, while independent tensors for type IIB are $F_{(1)}$, $F_{(3)}$ and self-dual part of $F_{(5)}$.

2.2. Fixing the chiral gauge invariance

The fermionic part of the action (2.14) has the form of the first order theory. We want to eliminate the fermionic momenta and work with the action expressed in terms of coordinates and their derivatives. So, on the equations of motion for fermionic momenta π_α and $\bar{\pi}_\alpha$,

$$\pi_\alpha = -\frac{\kappa}{2}\partial_+\left(\bar{\theta}^\beta + \bar{\Psi}^\beta_\mu x^\mu\right)(P^{-1})_{\beta\alpha}\,, \quad \bar{\pi}_\alpha = \frac{\kappa}{2}(P^{-1})_{\alpha\beta}\partial_-\left(\theta^\beta + \Psi^\beta_\mu x^\mu\right)\,, \tag{2.18}$$

the action gets the form

$$\begin{aligned}
S(\partial_\pm x, \partial_-\theta, \partial_+\bar{\theta}) &= \kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+x^\mu\,\Pi_{+\mu\nu}\partial_-x^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\xi\,\Phi R^{(2)} \\
&+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+\left(\bar{\theta}^\alpha + \bar{\Psi}^\alpha_\mu x^\mu\right)(P^{-1})_{\alpha\beta}\partial_-\left(\theta^\beta + \Psi^\beta_\nu x^\nu\right) \\
&= \kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+x^\mu\left[\Pi_{+\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}^\alpha_\mu(P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu\right]\partial_-x^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\xi\,\Phi R^{(2)} \\
&+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\left[\partial_+\bar{\theta}^\alpha(P^{-1})_{\alpha\beta}\partial_-\theta^\beta + \partial_+\bar{\theta}^\alpha(P^{-1}\Psi)_{\alpha\mu}\partial_-x^\mu + \partial_+x^\mu(\bar{\Psi}P^{-1})_{\mu\alpha}\partial_-\theta^\alpha\right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

In the above action θ^α appears only in the form $\partial_-\theta^\alpha$ and $\bar{\theta}^\alpha$ in the form $\partial_+\bar{\theta}^\alpha$. This means that the theory has a local symmetry

$$\delta\theta^\alpha = \varepsilon^\alpha(\sigma^+)\,, \quad \delta\bar{\theta}^\alpha = \bar{\varepsilon}^\alpha(\sigma^-)\,, \quad (\sigma^\pm = \tau \pm \sigma)\,. \tag{2.20}$$

We will treat this symmetry within BRST formalism. The corresponding BRST transformations are

$$s\theta^\alpha = c^\alpha(\sigma^+)\,, \quad s\bar{\theta}^\alpha = \bar{c}^\alpha(\sigma^-)\,, \tag{2.21}$$

where for each gauge parameter $\varepsilon^\alpha(\sigma^+)$ and $\bar{\varepsilon}^\alpha(\sigma^-)$ we introduced the ghost fields $c^\alpha(\sigma^+)$ and $\bar{c}^\alpha(\sigma^-)$, respectively. Here s is BRST nilpotent operator.

To fix gauge freedom we introduce gauge fermion with ghost number -1

$$\Psi = \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\left[\bar{C}_\alpha\left(\partial_+\theta^\alpha + \frac{\alpha^{\alpha\beta}}{2}b_{+\beta}\right) + \left(\partial_-\bar{\theta}^\alpha + \frac{1}{2}\bar{b}_{-\beta}\alpha^{\beta\alpha}\right)C_\alpha\right], \tag{2.22}$$

where $\alpha^{\alpha\beta}$ is arbitrary non-singular matrix, $\bar{C}_\alpha$ and C_α are antighost fields, while $b_{+\alpha}$ and $\bar{b}_{-\alpha}$ are Nakanishi–Lautrup auxiliary fields which satisfy

$$sC_\alpha = b_{+\alpha}\,, \quad s\bar{C}_\alpha = \bar{b}_{-\alpha}\,, \quad sb_{+\alpha} = 0 \quad s\bar{b}_{-\alpha} = 0\,. \tag{2.23}$$

BRST transformation of gauge fermion Ψ produces the gauge fixed and Fadeev–Popov action

$$\begin{aligned}
s\Psi &= S_{gf} + S_{FP}\,, \\
S_{gf} &= \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\left[\bar{b}_{-\alpha}\partial_+\theta^\alpha + \partial_-\bar{\theta}^\alpha b_{+\alpha} + \bar{b}_{-\alpha}\alpha^{\alpha\beta}b_{+\beta}\right], \\
S_{FD} &= \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\left[\bar{C}_\alpha\partial_+c^\alpha + (\partial_-\bar{c}^\alpha)C_\alpha\right].
\end{aligned} \tag{2.24}$$

The Fadeev–Popov action is decoupled from the rest and, consequently, it can be omitted in further analysis. On the equations of motion for b-fields

$$b_{+\alpha} = -(\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\partial_+\theta^\beta\,, \quad \bar{b}_{-\alpha} = -\partial_-\bar{\theta}^\beta(\alpha^{-1})_{\beta\alpha}\,, \tag{2.25}$$

we obtain the final form of the BRST gauge fixed action

$$S_{gf} = -\frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\,\partial_-\bar{\theta}^\alpha(\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\partial_+\theta^\beta\,. \tag{2.26}$$

2.3. Fermionic T-duality

We will perform fermionic T-duality using fermionic version of Buscher procedure similarly to Refs. [20] where we worked without chiral gauge fixing. After introducing S_{gf} the action still has a global shift symmetry in θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ directions. We introduce gauge fields $v^\alpha_\pm$ and $\bar{v}^\alpha_\pm$ and replace ordinary world-sheet derivatives with covariant ones

$$\partial_\pm\theta^\alpha \to D_\pm\theta^\alpha \equiv \partial_\pm\theta^\alpha + v^\alpha_\pm\,, \quad \partial_\pm\bar{\theta}^\alpha \to D_\pm\bar{\theta}^\alpha \equiv \partial_\pm\bar{\theta}^\alpha + \bar{v}^\alpha_\pm\,. \tag{2.27}$$

In order to make the fields $v^\alpha_\pm$ and $\bar{v}^\alpha_\pm$ to be unphysical we add the following terms in the action

$$\begin{aligned} S_{gauge}(\vartheta, v_\pm, \bar{\vartheta}, \bar{v}_\pm) = &\frac{1}{2}\kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\bar{\vartheta}_\alpha(\partial_+ v^\alpha_- - \partial_- v^\alpha_+) \\ &+ \frac{1}{2}\kappa\int_\Sigma d^2\xi(\partial_+\bar{v}^\alpha_- - \partial_-\bar{v}^\alpha_+)\vartheta_\alpha\,, \end{aligned} \tag{2.28}$$

where ϑ_α and $\bar{\vartheta}_\alpha$ are Lagrange multipliers. The full gauge invariant action is of the form

$$\begin{aligned} S_{inv}(x, \theta, \bar{\theta}, \vartheta, \bar{\vartheta}, v_\pm, \bar{v}_\pm) = &S(\partial_\pm x, D_-\theta, D_+\bar{\theta}) \\ &+ S_{gf}(D_-\theta, D_+\bar{\theta}) + S_{gauge}(\vartheta, \bar{\vartheta}, v_\pm, \bar{v}_\pm)\,. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Fixing θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ to zero we obtain the gauge fixed action

$$\begin{aligned} S_{fix} = &\kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+ x^\mu\left[\Pi_{+\mu\nu} + \frac{1}{2}\bar{\Psi}^\alpha_\mu(P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu\right]\partial_- x^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\xi\,\Phi R^{(2)} \\ &+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma\left[\bar{v}^\alpha_+(P^{-1})_{\alpha\beta}v^\beta_- + \bar{v}^\alpha_+(P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu\partial_- x^\nu + \partial_+ x^\mu\bar{\Psi}^\alpha_\mu(P^{-1})_{\alpha\beta}v^\beta_- - \bar{v}^\alpha_-(\alpha^{-1})_{\alpha\beta}v^\beta_+\right] \\ &+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\,\bar{\vartheta}_\alpha(\partial_+ v^\alpha_- - \partial_- v^\alpha_+) + \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi(\partial_+\bar{v}^\alpha_- - \partial_-\bar{v}^\alpha_+)\vartheta_\alpha\,. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Varying the above action with respect to the Lagrange multipliers ϑ_α and $\bar{\vartheta}_\alpha$ we obtain the initial action (2.19) because

$$\partial_+ v^\alpha_- - \partial_- v^\alpha_+ = 0 \Longrightarrow v^\alpha_\pm = \partial_\pm\theta^\alpha\,, \quad \partial_+\bar{v}^\alpha_- - \partial_-\bar{v}^\alpha_+ = 0 \Longrightarrow \bar{v}^\alpha_\pm = \partial_\pm\bar{\theta}^\alpha\,. \tag{2.31}$$

The equations of motion for $v^\alpha_\pm$ and $\bar{v}^\alpha_\pm$ give

$$\bar{v}^\alpha_- = \partial_-\bar{\vartheta}_\beta\alpha^{\beta\alpha}\,, \quad \bar{v}^\alpha_+ = \partial_+\bar{\vartheta}_\beta P^{\beta\alpha} - \partial_+ x^\mu\bar{\Psi}^\alpha_\mu\,, \tag{2.32}$$

$$v_+^\alpha = -\alpha^{\alpha\beta}\partial_+\vartheta_\beta\,, \quad v_-^\alpha = -P^{\alpha\beta}\partial_-\vartheta_\beta - \Psi_\mu^\alpha\partial_-x^\mu\,. \tag{2.33}$$

Substituting these expressions in the action S_{fix} we obtain the fermionic T-dual action

$$\begin{aligned}{}^\star S(\partial_\pm x, \partial_-\vartheta, \partial_+\bar\vartheta) &= \kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+x^\mu\Pi_{+\mu\nu}\partial_-x^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\xi\ {}^\star\Phi R^{(2)}\,, \\ &+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\left[\partial_+\bar\vartheta_\alpha P^{\alpha\beta}\partial_-\vartheta_\beta - \partial_+x^\mu\bar\Psi_\mu^\alpha\partial_-\vartheta_\alpha + \partial_+\bar\vartheta_\alpha\Psi_\mu^\alpha\partial_-x^\mu - \partial_-\bar\vartheta_\alpha\alpha^{\alpha\beta}\partial_+\vartheta_\beta\right].\end{aligned} \tag{2.34}$$

It should be in the form of the initial action (2.19)

$$\begin{aligned}{}^\star S &= \kappa\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+x^\mu\left[{}^\star\Pi_{+\mu\nu} + \frac{1}{2}{}^\star\Psi^{\alpha\mu}({}^\star P^{-1})^{\alpha\beta\,\star}\Psi_{\beta\nu}\right]\partial_-x^\nu + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma d^2\xi\,{}^\star\Phi R^{(2)} \qquad (2.35)\\ &+ \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\left[\partial_+\bar\vartheta_\alpha({}^\star P^{-1})^{\alpha\beta}\partial_-\vartheta_\beta + \partial_+x^\mu({}^\star\bar\Psi{}^\star P^{-1})_\mu^\alpha\partial_-\vartheta^\alpha + \partial_+\bar\vartheta_\alpha({}^\star P^{-1\,\star}\Psi)_\mu^\alpha\partial_-x^\nu\right] \\ &- \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi\,\partial_-\bar\vartheta_\alpha({}^\star\alpha^{-1})^{\alpha\beta}\partial_+\vartheta_\beta\,, \qquad (2.36)\end{aligned}$$

and so we get

$$ {}^\star\Psi_{\alpha\mu} = (P^{-1}\Psi)_{\alpha\mu}\,,\ {}^\star\bar\Psi_{\mu\alpha} = -(\bar\Psi P^{-1})_{\mu\alpha}\,, \tag{2.37}$$

$$ {}^\star P_{\alpha\beta} = (P^{-1})_{\alpha\beta}\,, \quad {}^\star\alpha_{\alpha\beta} = (\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\,. \tag{2.38}$$

From the condition

$$ {}^\star\Pi_{+\mu\nu} + \frac{1}{2}{}^\star\bar\Psi_{\alpha\mu}\,({}^\star P^{-1})^{\alpha\beta\,\star}\Psi_{\beta\nu} = \Pi_{+\mu\nu}\,, \tag{2.39}$$

we read the fermionic T-dual metric and Kalb–Ramond field

$$\begin{aligned}{}^\star G_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[(\bar\Psi P^{-1}\Psi)_{\mu\nu} + (\bar\Psi P^{-1}\Psi)_{\nu\mu}\right], \\ {}^\star B_{\mu\nu} &= B_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\left[(\bar\Psi P^{-1}\Psi)_{\mu\nu} - (\bar\Psi P^{-1}\Psi)_{\nu\mu}\right].\end{aligned} \tag{2.40}$$

Dilaton transformation under fermionic T-duality will be presented in the section 4. Let us note that two successive dualizations give the initial background fields.

The T-dual transformation laws are connection between initial and T-dual coordinates. We can obtain them combining the different solutions of equations of motion for $v_\pm^\alpha$ and $\bar v_\pm^\alpha$ (2.31) and (2.32)–(2.33)

$$\partial_-\theta^\alpha \cong -P^{\alpha\beta}\partial_-\vartheta_\beta - \Psi_\mu^\alpha\partial_-x^\mu\,, \quad \partial_+\bar\theta^\alpha \cong \partial_+\bar\vartheta_\beta P^{\beta\alpha} - \partial_+x^\mu\bar\Psi_\mu^\alpha\,, \tag{2.41}$$

$$\partial_+\theta^\alpha \cong -\alpha^{\alpha\beta}\partial_+\vartheta_\beta\,, \quad \partial_-\bar\theta^\alpha \cong \partial_-\bar\vartheta_\beta\alpha^{\beta\alpha}\,. \tag{2.42}$$

Here the symbol $\cong$ denotes the T-duality relation. From these relations we can obtain inverse transformation rules

$$\begin{aligned}\partial_-\vartheta_\alpha &\cong -(P^{-1})_{\alpha\beta}\partial_-\theta^\beta - (P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi_\mu^\beta\partial_-x^\mu\,, \\ \partial_+\bar\vartheta_\alpha &\cong \partial_+\bar\theta^\beta(P^{-1})_{\beta\alpha} + \partial_+x^\mu\bar\Psi_\mu^\beta(P^{-1})_{\beta\alpha}\,,\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\partial_+\vartheta_\alpha \cong -(\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\partial_+\theta^\beta\,, \qquad \partial_-\bar\vartheta_\alpha \cong \partial_-\bar\theta^\beta(\alpha^{-1})_{\beta\alpha}\,. \tag{2.44}$$

Note that without gauge fixing in subsection 2.2, instead expressions for $\bar{v}_{-}^{\alpha}$ and v_{+}^{α} (first relations of (2.32) and (2.33)), we would have only constraints on the T-dual variables, $\partial_- \bar{\vartheta}_\alpha = 0$ and $\partial_+ \vartheta_\alpha = 0$. Consequently, integration over $v_{\pm}^{\alpha}$ and $\bar{v}_{\pm}^{\alpha}$ would be singular and we would lose the part of T-dual transformations (2.42) and (2.44).

3. Fermionic T-dualization in fermionic double space

In this section we will extend the meaning of the double space. We will introduce double fermionic space adding to the fermionic coordinates, θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$, the fermionic T-dual ones, ϑ_α and $\bar{\vartheta}_\alpha$. Then we will show that fermionic T-dualization can be represented as permutation of the appropriate fermionic coordinates and their T-dual partners.

3.1. Transformation laws in fermionic double space

In the same way as the double bosonic coordinates were introduced [4,14,15], we double both fermionic coordinate as

$$\Theta^A = \begin{pmatrix} \theta^\alpha \\ \vartheta_\alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{\Theta}^A = \begin{pmatrix} \bar{\theta}^\alpha \\ \bar{\vartheta}_\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Each double coordinate has 32 real components. In terms of the double fermionic coordinates the transformation laws, (2.41)–(2.44), can be rewritten in the form

$$\partial_- \Theta^A \cong -\Omega^{AB} \left[\mathcal{F}_{BC} \partial_- \Theta^C + \mathcal{J}_{-B} \right], \quad \partial_+ \bar{\Theta}^A \cong \left[\partial_+ \bar{\Theta}^C \mathcal{F}_{CB} + \bar{\mathcal{J}}_{+B} \right] \Omega^{BA}, \tag{3.2}$$

$$\partial_+ \Theta^A \cong -\Omega^{AB} \mathcal{A}_{BC} \partial_+ \Theta^C, \quad \partial_- \bar{\Theta}^A \cong \partial_- \bar{\Theta}^C \mathcal{A}_{CB} \Omega^{BA}, \tag{3.3}$$

where "fermionic generalized metric" $\mathcal{F}_{AB}$ has the form

$$\mathcal{F}_{AB} = \begin{pmatrix} (P^{-1})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & P^{\gamma\delta} \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

and

$$\mathcal{A}_{AB} = \begin{pmatrix} (\alpha^{-1})_{\alpha\beta} & 0 \\ 0 & \alpha^{\gamma\delta} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

$\mathcal{F}_{AB}$ is bosonic variable but we put the name fermionic because it appears in the case of fermionic T-duality.

The double currents, $\bar{\mathcal{J}}_{+A}$ and $\mathcal{J}_{-A}$, are fermionic variables of the form

$$\bar{\mathcal{J}}_{+A} = \begin{pmatrix} (\bar{\Psi} P^{-1})_{\mu\alpha} \partial_+ x^\mu \\ -\bar{\Psi}_\mu^\alpha \partial_+ x^\mu \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{-A} = \begin{pmatrix} (P^{-1}\Psi)_{\alpha\mu} \partial_- x^\mu \\ \Psi_\mu^\alpha \partial_- x^\mu \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

while the matrix Ω^{AB} is constant

$$\Omega^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

where identity matrix is 16×16. By straightforward calculation we can prove the relations

$$\Omega^2 = 1, \quad \det \mathcal{F}_{AB} = 1. \tag{3.8}$$

Consistency of the transformation laws (3.2) produces

$$(\Omega \mathcal{F})^2 = 1, \quad \mathcal{J}_- = \mathcal{F} \Omega \mathcal{J}_-, \quad \bar{\mathcal{J}}_+ = -\bar{\mathcal{J}}_+ \Omega \mathcal{F}. \tag{3.9}$$

3.2. Double action

It is well known that equations of motion of initial theory are Bianchi identities in T-dual picture and vice versa. As a consequence of the identities

$$\partial_+\partial_-\Theta^A - \partial_-\partial_+\Theta^A = 0\,, \quad \partial_+\partial_-\bar{\Theta}^A - \partial_-\partial_+\bar{\Theta}^A = 0\,, \tag{3.10}$$

known as Bianchi identities, and relations (3.2) and (3.3), we obtain the consistency conditions

$$\partial_+(\mathcal{F}_{AB}\partial_-\Theta^B + J_{-A}) - \partial_-(\mathcal{A}_{AB}\partial_+\Theta^B) = 0\,, \tag{3.11}$$

$$\partial_-(\partial_+\bar{\Theta}^B\mathcal{F}_{BA} + \bar{J}_{+A}) - \partial_+(\partial_-\bar{\Theta}^B\mathcal{A}_{BA}) = 0\,. \tag{3.12}$$

The equations (3.11) and (3.12) are equations of motion of the following action

$$S_{double}(\Theta, \bar{\Theta}) = \tag{3.13}$$

$$= \frac{\kappa}{2}\int d^2\xi \left[\partial_+\bar{\Theta}^A\mathcal{F}_{AB}\partial_-\Theta^B + \bar{\mathcal{J}}_{+A}\partial_-\Theta^A + \partial_+\bar{\Theta}^A\mathcal{J}_{-A} - \partial_-\bar{\Theta}^A\mathcal{A}_{AB}\partial_+\Theta^B + L(x)\right],$$

where $L(x)$ is arbitrary functional of the bosonic coordinates.

3.3. Fermionic T-dualization of type II superstring theory as permutation of fermionic coordinates in double space

In order to exchange θ^α with ϑ_α and $\bar{\theta}$ with $\bar{\vartheta}_\alpha$, let us introduce the permutation matrix

$$\mathcal{T}^A{}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

so that double T-dual coordinates are

$${}^\star\Theta^A = \mathcal{T}^A{}_B\Theta^B\,, \quad {}^\star\bar{\Theta}^A = \mathcal{T}^A{}_B\bar{\Theta}^B\,. \tag{3.15}$$

We demand that T-dual transformation laws for double T-dual coordinates ${}^\star\Theta^A$ and ${}^\star\bar{\Theta}^A$ have the same form as for initial ones Θ^A and $\bar{\Theta}^A$ (3.2) and (3.3)

$$\partial_-{}^\star\Theta^A \cong -\Omega^{AB}\left[{}^\star\mathcal{F}_{BC}\partial_-{}^\star\Theta^C + {}^\star\mathcal{J}_{-B}\right], \quad \partial_+{}^\star\bar{\Theta}^A \cong \left[\partial_+{}^\star\bar{\Theta}^C\,{}^\star\mathcal{F}_{CB} + {}^\star\bar{\mathcal{J}}_{+B}\right]\Omega^{BA}\,, \tag{3.16}$$

$$\partial_+{}^\star\Theta^A \cong -\Omega^{AB}\,{}^\star\mathcal{A}_{BC}\partial_+{}^\star\Theta^C\,, \quad \partial_-{}^\star\bar{\Theta}^A \cong \partial_-{}^\star\bar{\Theta}^C\,{}^\star\mathcal{A}_{CB}\Omega^{BA}\,. \tag{3.17}$$

Then the fermionic T-dual "generalized metric" ${}^\star\mathcal{F}_{AB}$ and T-dual currents, ${}^\star\bar{\mathcal{J}}_{+A}$ and ${}^\star\mathcal{J}_{-A}$, with the help of (3.15) and (3.2), can be expressed in terms of initial ones

$${}^\star\mathcal{F}_{AB} = \mathcal{T}_A{}^C\mathcal{F}_{CD}\mathcal{T}^D{}_B\,, \quad {}^\star\bar{\mathcal{J}}_{+A} = \mathcal{T}_A{}^B\bar{\mathcal{J}}_{+B}\,, \quad {}^\star\mathcal{J}_{-A} = \mathcal{T}_A{}^B\mathcal{J}_{-B}\,. \tag{3.18}$$

The matrix $\mathcal{A}_{AB}$ transforms as

$${}^\star\mathcal{A}_{AB} = \mathcal{T}_A{}^C\mathcal{A}_{CD}\mathcal{T}^D{}_B = (\mathcal{A}^{-1})_{AB}\,. \tag{3.19}$$

Note that, as well as bosonic case, double space action (3.13) has global symmetry under transformations (3.15) if the conditions (3.18) are satisfied.

From the first relation in (3.18) we obtain the form of the fermionic T-dual R–R background field

$$^\star P_{\alpha\beta} = (P^{-1})_{\alpha\beta}\,, \tag{3.20}$$

while from the second and third equation we obtain the form of the fermionic T-dual NS–R background fields

$$^\star\Psi_{\alpha\mu} = (P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\mu\,, \quad ^\star\bar\Psi_{\alpha\mu} = -\bar\Psi^\beta_\mu (P^{-1})_{\beta\alpha}\,. \tag{3.21}$$

The non-singular matrix $\alpha^{\alpha\beta}$ transforms as

$$(^\star\alpha)_{\alpha\beta} = (\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\,. \tag{3.22}$$

The expressions (3.20)–(3.22) are in full agreement with the relations (2.37) and (2.38) obtained by the standard fermionic Buscher procedure. Consequently, we showed that permutation of fermionic coordinates defined in (3.14) and (3.15) completely reproduces fermionic T-dual R–R and NS–R background fields.

3.4. *Fermionic T-dual metric $^\star G_{\mu\nu}$ and Kalb–Ramond field $^\star B_{\mu\nu}$*

The expression $\Pi_{+\mu\nu} + \frac{1}{2}\Psi^\alpha_\mu (P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu$ appears in the action (2.19) coupled with $\partial_\pm x^\mu$, along which we do not T-dualize. It is an analogue of ij-term of Refs. [9,10] where x^i coordinates are not T-dualized, and $\alpha\beta$-term in [22] where fermionic directions are undualized.

Taking into account the form of the doubled action (3.13) we suppose that term $L(x)$ has the form

$$L(x) = 2\partial_+ x^\mu \left(\Pi_{+\mu\nu} + {}^\star\Pi_{+\mu\nu}\right)\partial_- x^\nu \equiv \mathcal{L} + {}^\star\mathcal{L}\,, \tag{3.23}$$

where $\Pi_{+\mu\nu}$ is defined in (2.15) and $^\star\Pi_{+\mu\nu}$ is fermionic T-dual which we are going to find. This term should be invariant under T-dual transformation

$$^\star\mathcal{L} = \mathcal{L} + \Delta\mathcal{L}\,. \tag{3.24}$$

Using the fact that two successive T-dualizations are identity transformation, we obtain

$$\mathcal{L} = {}^\star\mathcal{L} + {}^\star\Delta\mathcal{L}\,. \tag{3.25}$$

Combining last two relations we get

$$^\star\Delta\mathcal{L} = -\Delta\mathcal{L}\,. \tag{3.26}$$

If $\Delta\mathcal{L} = 2\partial_+ x^\mu \Delta_{\mu\nu}\partial_- x^\nu$, we obtain the condition for $\Delta_{\mu\nu}$

$$^\star\Delta_{\mu\nu} = -\,\Delta_{\mu\nu}\,. \tag{3.27}$$

Using the relations (2.37) and (2.38) we realize that, up to multiplication constant, combination

$$\Delta_{\mu\nu} = \bar\Psi^\alpha_\mu (P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu\,, \tag{3.28}$$

satisfies the condition (3.27). So, we conclude that

$$^\star\Pi_{+\mu\nu} = \Pi_{+\mu\nu} + c\bar\Psi^\alpha_\mu (P^{-1})_{\alpha\beta}\Psi^\beta_\nu\,, \tag{3.29}$$

where c is an arbitrary constant. For $c = \frac{1}{2}$ we obtain the relations (2.40). So, in double space formulation the fermionic T-dual NS–NS background fields can be obtained up to an arbitrary constant under assumption that two successive T-dualizations produce initial action.

4. Dilaton field in double fermionic space

Dilaton field transformation under fermionic T-duality is considered [16]. Here we will discuss some new features of dilaton transformation under fermionic T-duality as well as the dilaton field in fermionic double space.

Because the dilaton transformation has quantum origin we start with the path integral for the gauge fixed action given in Eq. (2.30)

$$Z = \int d\bar{v}_+^\alpha d\bar{v}_-^\alpha dv_+^\alpha dv_-^\alpha d\bar{\vartheta}_\alpha d\vartheta_\alpha e^{i\ S_{fix}(v_\pm, \bar{v}_\pm, \partial_\pm\vartheta, \partial_\pm\bar{\vartheta})} . \tag{4.1}$$

For constant background case, after integration over the fermionic gauge fields $\bar{v}_\pm^\alpha$ and $v_\pm^\alpha$, we obtain the generating functional Z in the form

$$Z = \int d\bar{\vartheta}_\alpha d\vartheta_\alpha \det\Big[(P^{-1}\alpha^{-1})_{\alpha\beta}\Big] e^{i\ {}^\star S(\vartheta, \bar{\vartheta})} , \tag{4.2}$$

where ${}^\star S(\vartheta, \bar{\vartheta})$ is T-dual action given in Eq. (2.34). We are able to perform such integration thank to the facts that we fixed the gauge in subsection 2.2.

Note that here we multiplied with determinants of P^{-1} and α^{-1} because we integrate over Grassman fields $v_\pm^\alpha$ and $\bar{v}_\pm^\alpha$. We can choose that $\det\alpha = 1$, and the generating functional gets the form

$$Z = \int d\bar{\vartheta}_\alpha d\vartheta_\alpha \det\Big[(P^{-1})_{\alpha\beta}\Big] e^{i\ {}^\star S(\vartheta, \bar{\vartheta})} . \tag{4.3}$$

This produces the fermionic T-dual transformation of dilaton field

$${}^\star\Phi = \Phi + \ln\det\Big[(P^{-1})_{\alpha\beta}\Big] = \Phi - \ln\det P^{\alpha\beta} . \tag{4.4}$$

Let us calculate $\det P^{\alpha\beta}$ using the expression

$$(P P_s^{-1} P^T)^{\alpha\beta} = P_s^{\alpha\beta} - P_a^{\alpha\gamma}(P_s^{-1})_{\gamma\delta} P_a^{\delta\beta} , \tag{4.5}$$

where we introduce the symmetric and antisymmetric parts for initial background fields

$$P_s^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(P^{\alpha\beta} + P^{\beta\alpha}\right) , \quad P_a^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(P^{\alpha\beta} - P^{\beta\alpha}\right) , \tag{4.6}$$

and similar expressions for T-dual background fields, ${}^\star P^s_{\alpha\beta}$ and ${}^\star P^a_{\alpha\beta}$. Taking into account that

$$(P \cdot {}^\star P)^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta , \tag{4.7}$$

we obtain

$$P_s^{\alpha\gamma}\ {}^\star P^s_{\gamma\beta} + P_a^{\alpha\gamma}\ {}^\star P^a_{\gamma\beta} = \delta^\alpha{}_\beta , \quad P_s^{\alpha\gamma\,\star} P^a_{\gamma\beta} + P_a^{\alpha\gamma\,\star} P^s_{\gamma\beta} = 0 . \tag{4.8}$$

From these two equations we obtain

$${}^\star P^s_{\alpha\beta} = \Big[(P_s - P_a P_s^{-1} P_a)^{-1}\Big]_{\alpha\beta} , \tag{4.9}$$

and, consequently, we have

$$(P P_s^{-1} P^T)^{\alpha\beta} = \Big[({}^\star P_s)^{-1}\Big]^{\alpha\beta} . \tag{4.10}$$

Taking determinant of the left and right-hand side of the above equation we get

$$\det P^{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{\det P_s}{\det {}^\star P_s}}\,, \tag{4.11}$$

which produces

$$^\star\Phi = \Phi - \ln\sqrt{\frac{\det P_s}{\det {}^\star P_s}}\,. \tag{4.12}$$

Using the fact that $P^{\alpha\beta} = e^{\frac{\Phi}{2}} F^{\alpha\beta}$ and $^\star P^{\alpha\beta} = e^{\frac{^\star\Phi}{2}}\, {}^\star F^{\alpha\beta}$, fermionic T-dual transformation law for dilaton takes the form

$$^\star\Phi = \Phi - \ln\sqrt{e^{8(\Phi - {}^\star\Phi)}\frac{\det F_s}{\det {}^\star F_s}}\,, \tag{4.13}$$

and finally we have

$$^\star\Phi = \Phi + \frac{1}{6}\ln\frac{\det F_s}{\det {}^\star F_s}\,. \tag{4.14}$$

It is obvious that two successive T-dualizations act as identity transformation

$$^{\star\star}\Phi = \Phi\,. \tag{4.15}$$

We can conclude that only symmetric parts of the R–R field strengths give contribution to the transformation of dilaton field under fermionic T-duality. In type IIA superstring theory R–R field strength $F^{\alpha\beta}$ contains tensors F^A_0, $F^A_{\mu\nu}$ and $F^A_{\mu\nu\rho\lambda}$, while in type IIB $F^{\alpha\beta}$ contains F^B_μ, $F^B_{\mu\nu\rho}$ and self dual part of $F^B_{\mu\nu\rho\lambda\omega}$. Using the conventions for gamma matrices from the appendix of the first reference in [1] (see Appendix A), we conclude that symmetric part of $F^{\alpha\beta}$ in type IIA contains scalar F^A_0 and 2-rank tensor $F^A_{\mu\nu}$, while in type IIB superstring theory it contains 1-rank F^B_μ and self dual part of 5-rank tensor $F^B_{\mu\nu\rho\lambda\omega}$.

Let us write the path integral for double action (3.13)

$$Z_{double} = \int d\Theta^A d\bar\Theta^A e^{i S_{double}(\Theta,\bar\Theta)}\,. \tag{4.16}$$

Because $\det\mathcal{F} = 1$ and $\det\mathcal{A} = 1$ we obtain that dilaton field in double space is invariant under fermionic T-duality. Consequently, a new dilaton should be introduced (see [14,15]), invariant under T-duality transformations. Because of the relation (4.15) we define the T-duality invariant dilaton as

$$\Phi_{inv} = \frac{1}{2}\left({}^\star\Phi + \Phi\right) = \Phi + \frac{1}{12}\ln\frac{\det F_s}{\det {}^\star F_s}\,, \qquad {}^\star\Phi_{inv} = \Phi_{inv}\,. \tag{4.17}$$

5. Concluding remarks

In this article we considered the fermionic T-duality of the type II superstring theory using the double space approach. We used the action of the type II superstring theory in pure spinor formulation neglecting ghost terms and keeping all terms up to the quadratic ones which means that all background fields are constant.

Using equations of motion with respect to the fermionic momenta π_α and $\bar{\pi}_\alpha$ we eliminated them from the action. We obtained the action expressed in terms of the derivatives $\partial_\pm x^\mu$, $\partial_-\theta^\alpha$ and $\partial_+\bar{\theta}^\alpha$, where θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ are fermionic coordinates. Because θ^α appears in the action in the form $\partial_-\theta^\alpha$ and $\bar{\theta}^\alpha$ in the form $\partial_+\bar{\theta}^\alpha$, there is a local chiral gauge symmetry with parameters depending on $\sigma^\pm = \tau \pm \sigma$. We fixed this gauge invariance using BRST approach.

Using the Buscher approach we performed fermionic T-duality procedure and obtained the form of the fermionic T-dual background fields. It is obvious that two successive fermionic T-dualizations produce initial theory i.e. they are equivalent to the identity transformation.

In the central point of the article we generalize the idea of double space and show that fermionic T-duality can be represented as permutation in fermionic double space. In the bosonic case double space spanned by coordinates $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$ can be obtained adding T-dual coordinates y_μ to the initial ones x^μ. Using analogy with the bosonic case we introduced double fermionic space doubling the initial coordinates θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$ with their fermionic T-duals, ϑ_α and $\bar{\vartheta}_\alpha$. Double fermionic space is spanned by the coordinates $\Theta^A = (\theta^\alpha, \vartheta_\alpha)$ and $\bar{\Theta}^A = (\bar{\theta}^\alpha, \bar{\vartheta}_\alpha)$.

T-dual transformation laws and their inverse ones are rewritten in fermionic double space by single relation introducing the fermionic generalized metric $\mathcal{F}_{AB}$ and currents $\mathcal{J}_{-A}$ and $\bar{\mathcal{J}}_{+A}$. Demanding that transformation laws for fermionic T-dual double coordinates, ${}^\star\Theta^A = \mathcal{T}^A{}_B\Theta^B$ and ${}^\star\bar{\Theta}^A = \mathcal{T}^A{}_B\bar{\Theta}^B$, are of the same form as those for Θ^A and $\bar{\Theta}^A$, we obtained fermionic T-dual generalized metric ${}^\star\mathcal{F}_{AB}$ and currents ${}^\star\mathcal{J}_{-A}$ and ${}^\star\bar{\mathcal{J}}_{+A}$. These transformations act as symmetry transformations of the double action (3.13). They produce the form of the fermionic T-dual NS–R and R–R background fields which are in full accordance with the results obtained by standard Buscher procedure.

The expressions for T-dual metric ${}^\star G_{\mu\nu}$ and Kalb–Ramond field ${}^\star B_{\mu\nu}$ cannot be found from double space formalism because they do not appear in the T-dual transformation laws. These expressions, up to arbitrary constant, are obtained assuming that two successive T-dualizations act as identity transformation.

We considered transformation of dilaton field under fermionic T-duality. We derived the transformation law for dilaton field and concluded that just symmetric parts of R–R field strengths, $F_s^{\alpha\beta}$ and ${}^\star F^s_{\alpha\beta}$, affected the dilaton transformation law. This means that in the case of type IIA scalar and 2-rank tensor have influence on the dilaton transformation, while in the case of type IIB 1-rank tensor and self-dual part of 5-rank tensor take that role.

Therefore, we extended T-dualization in double space to the fermionic case. We proved that permutation of fermionic coordinates with corresponding T-dual ones in double space is equivalent to the fermionic T-duality along initial coordinates θ^α and $\bar{\theta}^\alpha$.

Appendix A. Gamma matrices

In the appendix of the first reference of [1] one specific representation of gamma matrices is given. Here we will calculate the transpositions of basis matrices $(C\Gamma_{(k)})^{\alpha\beta}$ for $k = 1, 2, 3, 4, 5$, where C is charge conjugation operator.

The charge conjugation operator is antisymmetric matrix, $C^T = -C$, and it acts on gamma matrices as

$$C\Gamma^\mu C^{-1} = -(\Gamma^\mu)^T \,. \tag{A.1}$$

Now we have

$$(C\Gamma^\mu)^T = (\Gamma^\mu)^T C^T = -(\Gamma^\mu)^T C = C\Gamma^\mu C^{-1} C = C\Gamma^\mu \,, \tag{A.2}$$

$$(C\Gamma^\mu\Gamma^\nu)^T = C\Gamma^\mu\Gamma^\nu \Longrightarrow (C\Gamma^{[\mu\nu]})^T = C\Gamma^{[\mu\nu]}\,, \tag{A.3}$$

$$(C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho)^T = -C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho \Longrightarrow (C\Gamma^{[\mu\nu\rho]})^T = -C\Gamma^{[\mu\nu\rho]}\,, \tag{A.4}$$

$$(C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\lambda)^T = -C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\lambda \Longrightarrow (C\Gamma^{[\mu\nu\rho\lambda]})^T = -C\Gamma^{[\mu\nu\rho\lambda]}\,, \tag{A.5}$$

$$(C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\lambda\Gamma^\omega)^T = C\Gamma^\mu\Gamma^\nu\Gamma^\rho\Gamma^\lambda\Gamma^\omega \Longrightarrow (C\Gamma^{[\mu\nu\rho\lambda\omega]})^T = C\Gamma^{[\mu\nu\rho\lambda\omega]}\,. \tag{A.6}$$

References

[1] J. Polchinski, String Theory – Volume II, Cambridge University Press, 1998;
K. Becker, M. Becker, J.H. Schwarz, String Theory and M-Theory – A Modern Introduction, Cambridge University Press, 2007.

[2] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, Y. Lozano, An introduction to T-duality in string theory, arXiv:hep-th/9410237;
A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, Target space duality in string theory, Phys. Rep. 244 (1994) 77–202, arXiv:hep-th/9401139;
I. Bandos, B. Julia, J. High Energy Phys. 08 (2003) 032;
D. Luest, J. High Energy Phys. 12 (2010) 084.

[3] T.H. Buscher, Phys. Lett. B 194 (1987) 59;
T.H. Buscher, Phys. Lett. B 201 (1988) 466.

[4] M. Duff, Nucl. Phys. B 335 (1990) 610.

[5] A.A. Tseytlin, Phys. Lett. B 242 (1990) 163.

[6] A.A. Tseytlin, Nucl. Phys. B 350 (1991) 395.

[7] W. Siegel, Phys. Rev. D 48 (1993) 2826.

[8] W. Siegel, Phys. Rev. D 47 (1993) 5453.

[9] C.M. Hull, J. High Energy Phys. 10 (2005) 065.

[10] C.M. Hull, J. High Energy Phys. 10 (2007) 057;
C.M. Hull, J. High Energy Phys. 07 (2007) 080.

[11] D.S. Berman, M. Cederwall, M.J. Perry, J. High Energy Phys. 09 (2014) 066;
D.S. Berman, C.D.A. Blair, E. Malek, M.J. Perry, Int. J. Mod. Phys. A 29 (15) (2014) 1450080;
C.D.A. Blair, E. Malek, A.J. Routh, Class. Quantum Gravity 31 (20) (2014) 205011.

[12] C.M. Hull, R.A. Reid-Edwards, J. High Energy Phys. 09 (2009) 014.

[13] O. Hohm, B. Zwiebach, J. High Energy Phys. 11 (2014) 075.

[14] B. Sazdović, T-duality as coordinates permutation in double space, arXiv:1501.01024.

[15] B. Sazdović, J. High Energy Phys. 08 (2015) 055.

[16] N. Berkovits, J. Maldacena, J. High Energy Phys. 09 (2008) 062;
I. Bakhmatov, D.S. Berman, Nucl. Phys. B 832 (2010) 89–108;
K. Sfetsos, K. Siampos, D.C. Thompson, QMUL-PH-10-08, arXiv:1007.5142;
I. Bakhmatov, Fermionic T-duality and U-duality in type II supergravity, arXiv:1112.1983.

[17] N. Beisert, R. Ricci, A.A. Tseytlin, M. Wolf, Phys. Rev. D 78 (2008) 126004;
R. Ricci, A.A. Tseytlin, M. Wolf, J. High Energy Phys. 12 (2007) 082.

[18] M. Hatsuda, K. Kamimura, W. Siegel, J. High Energy Phys. 06 (2014) 039.

[19] W. Siegel, Phys. Rev. D 50 (1994) 2799–2805.

[20] B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Rev. D 84 (2011) 065012;
B. Nikolić, B. Sazdović, J. High Energy Phys. 06 (2012) 101.

[21] R. Benichou, G. Policastro, J. Troost, Phys. Lett. B 661 (2008) 192–195.

[22] B. Nikolić, B. Sazdović, arXiv:1505.06044.

[23] C.M. Hull, J. High Energy Phys. 07 (1998) 021.

[24] N. Berkovits, arXiv:hep-th/0209059;
P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, J. High Energy Phys. 10 (2002) 054;
P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, J. High Energy Phys. 11 (2002) 004;
P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, Adv. Theor. Math. Phys. 7 (2003) 499;
P.A. Grassi, G. Policastro, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 553 (2003) 96.

[25] J. de Boer, P.A. Grassi, P. van Nieuwenhuizen, Phys. Lett. B 574 (2003) 98.

[26] B. Nikolić, B. Sazdović, Phys. Lett. B 666 (2008) 400.

[27] B. Nikolić, B. Sazdović, J. High Energy Phys. 08 (2010) 037.

[28] B. Nikolić, B. Sazdović, Nucl. Phys. B 836 (2010) 100–126.

[29] P.A. Grassi, L. Tamassia, J. High Energy Phys. 07 (2004) 071.
[30] Lj. Davidović, B. Sazdović, Eur. Phys. J. C 74 (2014) 2683.
[31] Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, Eur. Phys. J. C 74 (2014) 2734.
[32] N. Berkovits, P. Howe, Nucl. Phys. B 635 (2002) 75–105.
[33] M.J. Duff, arXiv:hep-th/9912164v2.

ORIGINAL PAPER

Fortschritte der Physik
Progress of Physics

www.fp-journal.org

Noncommutativity and Nonassociativity of Closed Bosonic String on T-dual Toroidal Backgrounds

B. Nikolić and D. Obrić*

In this article we consider closed bosonic string in the presence of constant metric and Kalb-Ramond field with one non-zero component, $B_{xy} = Hz$, where field strength H is infinitesimal. Using Buscher T-duality procedure we dualize along x and y directions and using generalized T-duality procedure along z direction imposing trivial winding conditions. After first two T-dualizations we obtain Q flux theory which is just locally well defined, while after all three T-dualizations we obtain nonlocal R flux theory. Origin of non-locality is variable ΔV defined as line integral, which appears as an argument of the background fields. Rewriting T-dual transformation laws in the canonical form and using standard Poisson algebra, we obtained that Q flux theory is commutative one and the R flux theory is noncommutative and nonassociative one. Consequently, there is a correlation between non-locality and closed string noncommutativity and nonassociativity.

1. Introduction

Coordinate noncommutativity means that there exists minimal possible length, which imposes natural UV cutoff. Idea of coordinate noncommutativity is very old. Heisenberg suggested coordinate noncommutativity to solve the problem of the occurrence of infinite quantities before renormalization procedure was developed and accepted. The first scientific paper considering this subject appeared 1947[1] where construction of discrete Lorentz invariant space-time is presented. Later in the period of 1980s A. Connes developed noncommutative geometry as a generalization of the standard commutative geometry.[2]

Noncommutativity became again interesting for particle physicists when the paper[3] appeared. In this article it is shown using propagators that open string endpoints in the presence of the constant metric and Kalb-Ramond field become noncommutative. D-brane on which the string endpoints are forced to move becomes noncommutative manifold. After this article many articles[4] appeared addressing the same subject but using different approaches - Fourier expansion, canonical methods, solving of boundary conditions etc.

In the last two articles of [4] the method of solving of boundary conditions is presented. The basic idea is that open string boundary condition is treated as canonical constraint. Investigating the consistency of the canonical constraint we obtained the σ dependent form of the boundary condition. Further, we can proceed twofold: to introduce Dirac brackets or solve the constraint. Solving the constraint, we obtained the initial coordinate as a linear combination of the effective coordinate and momenta. Consequently, initial coordinates are noncommutative and the main contribution to noncomutativity parameter comes from Kalb-Ramond field as it was expected.

Following the result of the article[5] it can be proven that gauge fields "live" at the open string endpoints. Consequently, many interesting papers concerning non-commutative Yang-Mills theories and their renormalisability appeared.[6] In the papers[7] cross sections for some decays, allowed in noncommutative Yang-Mills theories and forbidden in commutative ones, are calculated, which offers a possibility of the experimental check of the noncommutativity idea and further, indirectly, idea of strings.

It is obvious that closed bosonic string in the presence of constant background fields remains commutative. There are no boundaries and, consequently, boundary conditions constraining string dynamics. In the case of open string we obtained initial coordinate in the form of linear combination of effective coordinates and momenta using boundary condition. That is achieved in the closed string case[8] using T-duality procedure and coordinate dependent background.

T-duality as a fundamental feature of string theory,[9–15] unexperienced by point particle, makes that there is no physical difference between string theory compactified on a circle of radius R and circle of radius $1/R$. Buscher T-dualization procedure[10] represents a mathematical frame in which T-dualization is realized. If the background fields do not depend on some coordinates then those coordinates are isometry directions. Consequently, that symmetry can be localized replacing ordinary world-sheet derivatives $\partial_\pm$ by covariant ones $D_\pm x^\mu = \partial_\pm x^\mu + v^\mu_\pm$, where $v^\mu_\pm$ are gauge fields. In order to make T-dual theory has the same number of degrees of freedom, the new term with Lagrange multipliers is added to the action which forces the gauge fields to be unphysical degrees of freedom. Because of the shift symmetry, using gauge freedom we fix initial coordinates. Variation of this gauge fixed action with respect to the Lagrange multipliers

B. Nikolić
Institute of Physics Belgrade
University of Belgrade
Pregrevica 118, Belgrade, Serbia
E-mail: bnikolic@ipb.ac.rs

D. Obrić
Faculty of Physics
University of Belgrade
Studentski trg 12, Belgrade, Serbia

DOI: 10.1002/prop.201800009

produces initial action and with respect to the gauge fields produces T-dual action.

Standard Buscher T-dualization was applied in closed string case in the papers.[8,16–19] In Ref. [16] authors consider 3-torus in the presence of constant metric and Kalb-Ramond field with one nonzero component $B_{xy} = Hz$, where field strength H is infinitesimal. They systematically apply Buscher procedure and, after two T-dualizations along isometry directions, obtain theory with Q flux which is noncommutative. In the calculations they used nontrivial boundary conditions (winding conditions). The result is that T-dual closed string coordinates are noncommutative for the same values of parameters $\sigma = \bar{\sigma}$ with noncommutativity parameter proportional to field strength H and N_3, winding number for z coordinate.

But, except this standard Buscher procedure, there is a generalized Buscher procedure dealing with background fields depending on all coordinates. The generalized procedure was applied to the case of bosonic string moving in the weakly curved background[20–22] and in the case where metric is quadratic in coordinates and Kalb-Ramond field is linear function of coordinates.[23] The generalized procedure enables us to make T-dualization in mentioned cases along arbitrary subset of coordinates.

Double space is one picturesque framework for representation of T-duality. Double space is introduced two to three decades ago.[24–28] It is spanned by double coordinates $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$ $(\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1)$, where x^μ are the coordinates of the initial theory and y_μ are T-dual coordinates. In this space T-dualization is represented as $O(d, d)$ transformation.[29–33] Permutation of the appropriate subsets of the initial and T-dual coordinates is interpreted as partial T-dualization[34,35] expanding Duff's idea.[24] The newly invented intrinsic noncommutativity[36] is related to double space. Intrinsic noncommutativity exists in the constant background case because it is considered within double space framework.

In this article we will deal with closed bosonic string propagating in the constant metric and linear dependent Kalb-Ramond field with $B_{xy} = Hz$, the same background as in [16]. This configuration is known in literature as torus with H-flux. As in the Ref. [16] we will use approximation of diluted flux, which means that in all calculations we keep constant and linear terms in infinitesimal field strength H. Transformation laws, relations which connect initial and T-dual variables, we will write in canonical form expressing initial momenta in terms of the T-dual coordinates. Unlike Ref. [16], except T-dualization along two isometry directions, we will make one step more and T-dualize along z coordinate using generalized T-dualization procedure. During dualization procedure we will use trivial boundary (winding) conditions.

Transformation laws in canonical form enable us to express sigma derivative of the T-dual coordinate as a linear combination of the initial momenta and coordinates. Because initial theory is geometrical locally and globally, its coordinates and canonically conjugated momenta satisfy standard Poisson algebra. This fact means that we can calculate the Poisson brackets of the T-dual coordinates using technical instruction given in subsection 4.1.

After T-dualizations along isometry directions (along x and y) we obtain the same background as in Ref. [16] but, obtained Q flux theory, which is still locally well defined, is commutative. This is a consequence of the imposed trivial winding conditions. Having in mind the generalized T-duality procedure,[20,21,23] T-dualization along z coordinate produces R flux nonlocal theory because it depends on the variable ΔV which is defined as line integral. Calculating Poisson brackets of the T-dual coordinates we obtain two nonzero Poisson brackets and show that there is a correlation between non-locality and closed string noncommutativity.

The form of noncommutativity is such that it exists when arguments of the coordinates are different, $\sigma \neq \bar{\sigma}$. That is another difference with respect to the result of Ref. [16] but there is no contradiction because the origins of noncommutativity are different. In this article non-locality is related with noncommutativity of R flux theory under trivial winding conditions while in Ref. [16] it is about noncommutativity of Q flux theory under nontrivial winding conditions.

From the noncommutativity relations it follows that Jacobi identity is broken i.e. nonassociativity occurs. Nonassociativity parameter, R flux, is proportional to the field strength H. Using generalized T-duality[20,21,23] we obtain the concrete form of nonassociativity from string dynamics. Similar as noncommutativity, discovery of nonassociativity pushes the scientists to explore the effects of nonassociativity in the field of renormalisability of ϕ^4 theory[37] as well as formulation of nonassociative gravity.[38]

At the end we add an appendix containing some conventions used in the paper.

2. Bosonic String Action and Choice of Background Fields

The action of the closed bosonic string in the presence of the space-time metric $G_{\mu\nu}(x)$, Kalb-Ramond antisymmetric field $B_{\mu\nu}(x)$, and dilaton scalar field $\Phi(x)$ is given by the following expression[9]

$$S = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-g} \times \left\{ \left[\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) + \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} B_{\mu\nu}(x) \right] \partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + \Phi(x) R^{(2)} \right\}, \tag{2.1}$$

where Σ is the world-sheet surface parameterized by $\xi^\alpha = (\tau, \sigma)$ $[(\alpha = 0, 1),\ \sigma \in (0, \pi)]$, while the D-dimensional space-time is spanned by the coordinates x^μ $(\mu = 0, 1, 2, \dots, D-1)$. We denote intrinsic world sheet metric with $g_{\alpha\beta}$, and the corresponding scalar curvature with $R^{(2)}$.

In order to keep conformal symmetry on the quantum level background fields must obey space-time field equations[39]

$$\beta^G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_\nu{}^{\rho\sigma} + 2 D_\mu a_\nu = 0, \tag{2.2}$$

$$\beta^B_{\mu\nu} \equiv D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} - 2 a_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0, \tag{2.3}$$

$$\beta^\Phi \equiv 2\pi\kappa \frac{D-26}{6} - R - \frac{1}{24} B_{\mu\rho\sigma} B^{\mu\rho\sigma} - D_\mu a^\mu + 4a^2 = c, \tag{2.4}$$

where c is an arbitrary constant. The function β^Φ could be a constant because of the relation

$$D^\nu \beta^G_{\nu\mu} + \partial_\mu \beta^\Phi = 0. \tag{2.5}$$

Further, $R_{\mu\nu}$ and D_μ are Ricci tensor and covariant derivative with respect to the space-time metric $G_{\mu\nu}$, while

$$B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}, \quad a_\mu = \partial_\mu \Phi, \tag{2.6}$$

are field strength for Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$ and dilaton gradient, respectively. Trivial solution of these equations is that all three background fields are constant. This case was pretty exploited in the analysis of the open string noncommutativity.

The less trivial case would be a case where some background fields are coordinate dependent. If we choose Kalb-Ramond field to be linearly coordinate dependent and dilaton field to be constant then the first equation (2.2) becomes

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_\nu{}^{\rho\sigma} = 0. \tag{2.7}$$

The field strength $B_{\mu\nu\rho}$ is constant and, if we assume that it is infinitesimal, then we can take $G_{\mu\nu}$ to be constant in approximation linear in $B_{\mu\nu\rho}$. Consequently, all three space-time field equations are satisfied. Especially, the third one is of the form

$$2\pi\kappa \frac{D-26}{6} = c, \tag{2.8}$$

which enables us to work in arbitrary number of space-time dimensions.

In this article we will work in $D = 3$ dimensions with the following choice of background fields

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & R_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & R_3^2 \end{pmatrix}, \quad B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Hz & 0 \\ -Hz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.9}$$

where $R_\mu (\mu = 1, 2, 3)$ are radii of the compact dimensions. This choice of background fields is known in geometry as torus with flux (field strength) H.[16] Our choice of infinitesimal H can be understood in terms of the radii as that

$$\left(\frac{H}{R_1 R_2 R_3}\right)^2 = 0. \tag{2.10}$$

This approximation is known in literature as the approximation of diluted flux. Physically, this means that we work with the torus which is sufficiently large. Consequently, we can rescale the coordinates

$$x^\mu \longmapsto \frac{x^\mu}{R_\mu}, \tag{2.11}$$

which simplifies the form of the metric

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

The final form of the closed bosonic string action is

$$\begin{aligned} S &= \kappa \int_\Sigma d^2\xi\, \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu} \partial_- x^\nu \\ &= \kappa \int_\Sigma d^2\xi \left[\frac{1}{2}(\partial_+ x \partial_- x + \partial_+ y \partial_- y + \partial_+ z \partial_- z) \right. \\ &\quad \left. + \partial_+ x Hz \partial_- y - \partial_+ y Hz \partial_- x\right], \end{aligned} \tag{2.13}$$

where $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$ is world-sheet derivative with respect to the light-cone coordinates $\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$, $\Pi_{\pm\mu\nu} = B_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}$ and

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

Let us note that we do not write dilaton term because its T-dualization is performed separately within quantum formalism and here will be skipped.

3. T-dualization of the Bosonic Closed String Action

In this section we will perform T-dualization along three directions, one direction at time. Our goal is to find the relations connecting initial variables with T-dual ones called transformation laws. Using transformation laws we will find noncommutativity and nonassociativity relations.

3.1. T-dualization Along x Direction – from Torus with H Flux to the Twisted Torus

Let us perform standard Buscher T-dualization[10] of action (2.13) along x direction. Note that x direction is an isometry direction which means that action has a global shift symmetry, $x \longrightarrow x + a$. In order to perform Buscher procedure, we have to localize this symmetry introducing covariant world-sheet derivatives instead of the ordinary ones

$$\partial_\pm x \longrightarrow D_\pm x = \partial_\pm x + v_\pm, \tag{3.1}$$

where $v_\pm$ are gauge fields which transform as $\delta v_\pm = -\partial_\pm a$. Because T-dual action must have the same number of degrees of freedom as initial one, we have to make these fields $v_\pm$ be unphysical degrees of freedom. This is accomplished by adding following term to the action

$$S_{add} = \frac{\kappa}{2} \int_\Sigma d^2\xi\, y_1 (\partial_+ v_- - \partial_- v_+), \tag{3.2}$$

where y_1 is a Lagrange multiplier. After gauge fixing, $x = const.$, the action gets the form

$$\begin{aligned} S_{fix} = \kappa \int d^2\xi \left[\frac{1}{2}(v_+ v_- + \partial_+ y \partial_- y + \partial_+ z \partial_- z) + v_+ Hz \partial_- y \right. \\ \left. - \partial_+ y Hz v_- + \frac{1}{2} y_1 (\partial_+ v_- - \partial_- v_+)\right]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

From the equations of motion for y_1 we obtain that field strength for the gauge field $v_\pm$ is equal to zero

$$F_{+-} = \partial_+ v_- - \partial_- v_+ = 0, \tag{3.4}$$

which gives us the solution for gauge field

$$v_\pm = \partial_\pm x. \tag{3.5}$$

Inserting this solution for gauge field into gauge fixed action (3.3) we obtain initial action given by Eq. (2.13). Equations of motion for $v_\pm$ will lead to the T-dual action. Varying the gauge fixed action (3.3) with respect to the gauge field v_+ we get

$$v_- = -\partial_- y_1 - 2Hz\partial_- y, \tag{3.6}$$

while on the equation of motion for v_- it holds

$$v_+ = \partial_+ y_1 + 2Hz\partial_+ y. \tag{3.7}$$

Inserting relations (3.6) and (3.7) into expression for gauge fixed action (3.3), keeping terms linear in H, we obtain the T-dual action

$${}_xS = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\, \partial_+ ({}_xX)^\mu\, {}_x\Pi_{+\mu\nu} \partial_- ({}_xX)^\nu, \tag{3.8}$$

where subscript $_x$ denotes quantity obtained after T-dualization along x direction and

$${}_xX^\mu = \begin{pmatrix} y_1 \\ y \\ z \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Further we have the T-dual background fields

$${}_x\Pi_{+\mu\nu} = {}_xB_{\mu\nu} + \frac{1}{2}{}_xG_{\mu\nu}, \quad {}_xB_{\mu\nu} = 0,$$
$${}_xG_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 2Hz & 0 \\ 2Hz & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Obtained background fields (3.10) define that what is known in literature as *twisted torus geometry*. String theory after one T-dualization is geometrically well defined globally and locally or, simply, theory is geometrical (flux H takes the role of connection).

Combining the solutions of equations of motion for Lagrange multiplier (3.5) and for gauge fields, (3.6) and (3.7), we get the transformation laws connecting initial, x^μ, and T-dual, ${}_xX^\mu$, coordinates

$$\partial_\pm x \cong \pm\partial_\pm y_1 \pm 2Hz\partial_\pm y, \tag{3.11}$$

where $\cong$ denotes T-duality relation. The momentum π_x is canonically conjugated to the initial coordinate x. Using the initial action (2.13) we get

$$\pi_x = \frac{\delta S}{\delta \dot{x}} = \kappa(\dot{x} - 2Hzy'), \tag{3.12}$$

where $\dot{A} \equiv \partial_\tau A$ and $A' \equiv \partial_\sigma A$. From transformation law (3.11) it is straightforward to obtain

$$\dot{x} \cong y_1' + 2Hzy', \tag{3.13}$$

which, inserted in the expression for momentum π_x, gives transformation law in canonical form

$$\pi_x \cong \kappa y_1'. \tag{3.14}$$

3.2. From Twisted Torus to Non-geometrical Q Flux

In this subsection we will continue the T-dualization of action (3.8) along y direction. After x and y T-dualization we obtain the structure which has local geometrical interpretation but global omissions. Such structure is known in literature as non-geometry.

We repeat the procedure from the previous subsection and form the gauge fixed action

$$S_{fix} = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \left[\frac{1}{2}(\partial_+ y_1 \partial_- y_1 + v_+ v_- + \partial_+ z \partial_- z) + \partial_+ y_1 Hz v_- \right.$$
$$\left. + v_+ Hz\partial_- y_1 + \frac{1}{2} y_2 (\partial_+ v_- - \partial_- v_+)\right]. \tag{3.15}$$

From the equation of motion for Lagrange multiplier y_2

$$\partial_+ v_- - \partial_- v_+ = 0 \longrightarrow v_\pm = \partial_\pm y, \tag{3.16}$$

gauge fixed action becomes initial one (3.8). Varying the gauge fixed action (3.15) with respect to the gauge fields we get

$$v_\pm = \pm\partial_\pm y_2 - 2Hz\partial_\pm y_1. \tag{3.17}$$

Inserting these expressions for gauge fields into gauge fixed action, keeping the terms linear in H, gauge fixed action is driven into T-dual action

$${}_{xy}S = \kappa \int d^2\xi\, \partial_+ ({}_{xy}X)^\mu\, {}_{xy}\Pi_{+\mu\nu} \partial_- ({}_{xy}X)^\nu, \tag{3.18}$$

where

$$({}_{xy}X)^\mu = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ z \end{pmatrix},$$

$${}_{xy}\Pi_{+\mu\nu} = {}_{xy}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}{}_{xy}G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -Hz & 0 \\ Hz & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{3.19}$$

Explicit expressions for background fields are

$${}_{xy}B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -Hz & 0 \\ Hz & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -B_{\mu\nu}, \quad {}_{xy}G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Let us note that background fields obtained after two T-dualizations are similar to the geometric background of torus with H flux, but they should be considered only locally. Their global properties are non-trivial and because of that the term "non-geometry" is introduced.

Combining the equations of motion for Lagrange multiplier y_2 and for gauge fields $v_\pm$, we obtain T-dual transformation laws

$$\partial_\pm y \cong \pm\partial_\pm y_2 - 2Hz\partial_\pm y_1. \tag{3.21}$$

The y component of the initial canonical momentum π_y is a variation of the initial action with respect to the $\dot{y}$

$$\pi_y = \frac{\delta S}{\delta \dot{y}} = \kappa(\dot{y} + 2Hzx'). \tag{3.22}$$

Using T-dual transformation laws (3.21) we easily get

$$\dot{y} \cong y_2' - 2Hz\dot{y}_1, \tag{3.23}$$

while from the transformation law (3.11), at zeroth order in H, it holds $x' \cong \dot{y}_1$. Inserting last two expression into π_y we obtain transformation law in canonical form

$$\pi_y \cong \kappa y_2'. \tag{3.24}$$

After two T-dualizations along isometry directions, in the approximation of the diluted flux (keeping just terms linear in H), according to the canonical forms of the transformation laws (3.14) and (3.24), we see that T-dual coordinates y_1 and y_2 are still commutative. This is a consequence of the simple fact that variables of the initial theory, which is geometrical one, satisfy standard Poisson algebra

$$\left\{x^\mu(\sigma), \pi_\nu(\bar{\sigma})\right\} = \delta^\mu{}_\nu\delta(\sigma-\bar{\sigma}), \quad \{x^\mu, x^\nu\} = \left\{\pi_\mu, \pi_\nu\right\} = 0, \tag{3.25}$$

where

$$\pi_\mu = \begin{pmatrix} \pi_x \\ \pi_y \\ \pi_z \end{pmatrix}. \tag{3.26}$$

3.3. From *Q* to *R* Flux – T-dualization Along *z* Coordinate

In this subsection we will finalize the process of T-dualization dualizing along remaining z direction. For this purpose we will use generalized T-dualization procedure.[20,21,23] The result is a theory which is not well defined even locally and is known in literature as theory with R-flux.

We start with the action obtained after T-dualizations along x and y directions (3.18). The Kalb-Ramond field (3.20) depends on z and it seems that it is not possible to perform T-dualization. Let us assume that Kalb-Ramond field linearly depends on all coordinates, $B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3}B_{\mu\nu\rho}x^\rho$ and check if some global transformation can be treated as isometry one. We start with global shift transformation

$$\delta x^\mu = \lambda^\mu, \tag{3.27}$$

and make a variation of action

$$\begin{aligned}\delta S &= \frac{\kappa}{3}B_{\mu\nu\rho}\lambda^\rho\int_\Sigma d^2\xi\,\partial_+x^\mu\partial_-x^\nu \\ &= \frac{2k}{3}B_{\mu\nu\rho}\lambda^\rho\epsilon^{\alpha\beta}\int_\Sigma d^2\xi[\partial_\alpha(x^\mu\partial_\beta x^\nu) - x^\mu(\partial_\alpha\partial_\beta x^\nu)].\end{aligned} \tag{3.28}$$

The second term vanishes explicitly, while the first term is surface one. Consequently, in the case of constant metric and linearly dependent Kalb-Ramond field, global shift transformation is an isometry transformation. This means that we can make T-dualization along z coordinate using generalized T-dualization procedure.

The generalized T-dualization procedure is presented in detail in Ref. [20]. In order to localize shift symmetry of the action (3.18) along z direction we introduce covariant derivative

$$\partial_\pm z \longrightarrow D_\pm z = \partial_\pm z + v_\pm, \tag{3.29}$$

which is a part of the standard Buscher procedure. The novelty is introduction of the invariant coordinate as line integral

$$\begin{aligned}z^{inv} &= \int_P d\xi^\alpha D_\alpha z \\ &= \int_P d\xi^+ D_+z + \int_P d\xi^- D_-z = z(\xi) - z(\xi_0) + \Delta V,\end{aligned} \tag{3.30}$$

where

$$\Delta V = \int_P d\xi^\alpha v_\alpha = \int_P (d\xi^+ v_+ + d\xi^- v_-). \tag{3.31}$$

Here ξ and ξ_0 are the current and initial point of the world-sheet line P. At the end, as in the standard Buscher procedure, in order to make $v_\pm$ to be unphysical degrees of freedom we add to the action term with Lagrange multiplier

$$S_{add} = \frac{\kappa}{2}\int_\Sigma d^2\xi\ y_3(\partial_+v_- - \partial_+v_-). \tag{3.32}$$

The final form of the action is

$$\begin{aligned}\bar{S} = \kappa\int_\Sigma d^2\xi\Big[&-Hz^{inv}(\partial_+y_1\partial_-y_2 - \partial_+y_2\partial_-y_1) \\ &+\frac{1}{2}(\partial_+y_1\partial_-y_1 + \partial_+y_2\partial_-y_2 + D_+zD_-z) \\ &+\frac{1}{2}\ y_3(\partial_+v_- - \partial_-v_+)\Big].\end{aligned} \tag{3.33}$$

Because of existing shift symmetry we fix the gauge, $z(\xi) = z(\xi_0)$, and then the gauge fixed action takes the form

$$S_{fix} = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \Big[- H\Delta V(\partial_+ y_1 \partial_- y_2 - \partial_+ y_2 \partial_- y_1) + \frac{1}{2}(\partial_+ y_1 \partial_- y_1 + \partial_+ y_2 \partial_- y_2 + v_+ v_-) + \frac{1}{2} y_3 (\partial_+ v_- - \partial_- v_+)\Big]. \tag{3.34}$$

From the equation of motion for Lagrange multiplier y_3 we obtain

$$\partial_+ v_- - \partial_- v_+ = 0 \Longrightarrow v_\pm = \partial_\pm z, \quad \Delta V = \Delta z, \tag{3.35}$$

which drives back the gauge fixed action to the initial action (3.18). Varying the gauge fixed action (3.34) with respect to the gauge fields $v_\pm$ we get the following equations of motion

$$v_\pm = \pm\partial_\pm y_3 - 2\beta^\mp, \tag{3.36}$$

where $\beta^\pm$ functions are defined as

$$\beta^\pm = \pm\frac{1}{2} H(y_1 \partial_\mp y_2 - y_2 \partial_\mp y_1). \tag{3.37}$$

The $\beta^\pm$ functions are obtained as a result of the variation of the term containing ΔV

$$\delta_v \left(-2\kappa \int d^2\xi \varepsilon^{\alpha\beta} H \partial_\alpha y_1 \partial_\beta y_2 \Delta V\right) = \kappa \int d^2\xi \left(\beta^+ \delta v_+ + \beta^- \delta v_-\right), \tag{3.38}$$

using partial integration and the fact that $\partial_\pm V = v_\pm$. Inserting the relations (3.36) into the gauge fixed action, keeping linear terms in H, we obtain the T-dual action

$${}_{xyz}S = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\, \partial_+ {}_{xyz}X^\mu\, {}_{xyz}\Pi_{+\mu\nu}\, \partial_- {}_{xyz}X^\nu, \tag{3.39}$$

where

$${}_{xyz}X^\mu = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \quad {}_{xyz}\Pi_{+\mu\nu} = {}_{xyz}B_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\, {}_{xyz}G_{\mu\nu}, \tag{3.40}$$

$${}_{xyz}B_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -H\Delta\tilde{y}_3 & 0 \\ H\Delta\tilde{y}_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad {}_{xyz}G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.41}$$

Here we introduced double coordinate $\tilde{y}_3$ defined as

$$\partial_\pm y_3 \equiv \pm\partial_\pm \tilde{y}_3. \tag{3.42}$$

Let us note that ΔV stands beside field strength H, which implicates that, according to the diluted flux approximation, we calculate ΔV in the zeroth order in H

$$\Delta V = \int d\xi^+ \partial_+ y_3 - \int d\xi^- \partial_- y_3. \tag{3.43}$$

Having this into account it is clear why we defined double coordinate $\tilde{y}_3$ as in Eq. (3.42). Also it is useful to note that presence of ΔV, which is defined as line integral, represents the source of non-locality of the T-dual theory. the result of the three T-dualization is a theory with R flux as it is known in the literature.

Combining the equations of motion for Lagrange multiplier (3.35), $v_\pm = \partial_\pm z$, and equations of motion for gauge fields (3.36), we obtain the T-dual transformation law

$$\partial_\pm z \cong \pm\partial_\pm y_3 - 2\beta^\mp. \tag{3.44}$$

Adding transformation laws for $\partial_+ z$ and $\partial_- z$ we get the transformation law for $\dot{z}$

$$\dot{z} \cong y_3' + H(y_1 y_2' - y_2 y_1'), \tag{3.45}$$

which enables us to write down the transformation law in the canonical form

$$y_3' \cong \frac{1}{\kappa}\pi_z - H(xy' - yx'). \tag{3.46}$$

Here we used the expression for the canonical momentum of the initial theory (2.13)

$$\pi_z = \frac{\delta S}{\delta \dot{z}} = \kappa \dot{z}. \tag{3.47}$$

4. Noncommutativity and Nonassociativity Using T-duality

In the open string case noncommutativity comes from the boundary conditions which makes that coordinates x^μ depend both on the effective coordinates and on the effective momenta.[4] Effective coordinates and momenta do not commute and, consequently, coordinates x^μ do not commute. In the closed bosonic string case the logic is the same but the execution is different. Using T-duality we obtained transformation laws, (3.11), (3.21) and (3.44), which relate T-dual coordinates with the initial coordinates and their canonically conjugated momenta. In this section we will use these relations to get noncommutativity and nonassociativity relations.

4.1. Noncommutativity Relations

Let us start with the Poisson bracket of the σ derivatives of two arbitrary coordinates in the form

$$\{A'(\sigma), B'(\bar{\sigma})\} = U'(\sigma)\delta(\sigma - \bar{\sigma}) + V(\sigma)\delta'(\sigma - \bar{\sigma}), \tag{4.1}$$

where $\delta'(\sigma-\bar\sigma)\equiv\partial_\sigma\delta(\sigma-\bar\sigma)$. In order to find the form of the Poisson bracket

$$\{A(\sigma),\, B(\bar\sigma)\},$$

we have to find the form of the Poisson bracket

$$\{\Delta A(\sigma,\sigma_0),\Delta B(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\},$$

where

$$\Delta A(\sigma,\sigma_0)=\int_{\sigma_0}^{\sigma}dx A'(x)=A(\sigma)-A(\sigma_0),$$
$$\Delta B(\bar\sigma,\bar\sigma_0)=\int_{\bar\sigma_0}^{\bar\sigma}dx B'(x)=B(\bar\sigma)-B(\bar\sigma_0). \tag{4.2}$$

Now we have

$$\{\Delta A(\sigma,\sigma_0),\Delta B(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\}=\int_{\sigma_0}^{\sigma}dx\int_{\bar\sigma_0}^{\bar\sigma}dy\,\left[U'(x)\delta(x-y)+V(x)\delta'(x-y)\right]. \tag{4.3}$$

After integration over y we get

$$\{\Delta A(\sigma,\sigma_0),\Delta B(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\}=\int_{\sigma_0}^{\sigma}dx\left\{U'(x)\left[\theta(x-\bar\sigma_0)-\theta(x-\bar\sigma)\right]+V(x)\left[\delta(x-\bar\sigma_0)-\delta(x-\bar\sigma)\right]\right\}, \tag{4.4}$$

where function $\theta(x)$ is defined as

$$\theta(x)=\int_0^x d\eta\delta(\eta)=\frac{1}{2\pi}\left[x+2\sum_{n\geq1}\frac{1}{n}\sin(nx)\right]=\begin{cases}0 & \text{if } x=0\\ 1/2 & \text{if } 0<x<2\pi.\\ 1 & \text{if } x=2\pi\end{cases} \tag{4.5}$$

Integrating over x using partial integration finally we obtain

$$\begin{aligned}\{\Delta A(\sigma,\sigma_0),\Delta B(\bar\sigma,\bar\sigma_0)\}&=U(\sigma)[\theta(\sigma-\bar\sigma_0)-\theta(\sigma-\bar\sigma)]\\&-U(\sigma_0)[\theta(\sigma_0-\bar\sigma_0)-\theta(\sigma_0-\bar\sigma)]-U(\bar\sigma_0)[\theta(\sigma-\bar\sigma_0)-\theta(\sigma_0-\bar\sigma_0)]\\&+U(\bar\sigma)[\theta(\sigma-\bar\sigma)-\theta(\sigma_0-\bar\sigma)]+V(\bar\sigma_0)[\theta(\sigma-\bar\sigma_0)-\theta(\sigma_0-\bar\sigma_0]\\&-V(\bar\sigma)[\theta(\sigma-\bar\sigma)-\theta(\sigma_0-\bar\sigma)].\end{aligned} \tag{4.6}$$

From the last expression, using the right-hand sides of the expressions in Eq. (4.2), we extract the desired Poisson bracket

$$\{A(\sigma),\, B(\bar\sigma)\}=-[U(\sigma)-U(\bar\sigma)+V(\bar\sigma)]\theta(\sigma-\bar\sigma). \tag{4.7}$$

Let us rewrite the canonical forms of the transformation laws, (3.14), (3.24) and (3.46), in the following way

$$y_1'\cong\frac{1}{\kappa}\pi_x,\quad y_2'\cong\frac{1}{\kappa}\pi_y,\quad y_3'\cong\frac{1}{\kappa}\pi_z-H(xy'-yx'). \tag{4.8}$$

In order to find the Poisson brackets between T-dual coordinates y_μ we will use the algebra of the coordinates and momenta of the initial theory (3.25). It is obvious that only nontrivial Poisson brackets will be $\{y_1(\sigma),y_3(\bar\sigma)\}$ and $\{y_2(\sigma),y_3(\bar\sigma)\}$.

Let us first write the corresponding Poisson brackets of the sigma derivatives of T-dual coordinates y_μ using (4.8)

$$\{y_1'(\sigma),y_3'(\bar\sigma)\}\cong\frac{2}{\kappa}Hy'(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma)+\frac{1}{\kappa}Hy(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma), \tag{4.9}$$

$$\{y_2'(\sigma),y_3'(\bar\sigma)\}\cong-\frac{2}{\kappa}Hx'(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma)-\frac{1}{\kappa}Hx(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma), \tag{4.10}$$

while all other Poisson brackets are zero. We see that these Poisson brackets are of the form (4.1), so, we can apply the result (4.7). Consequently, we get

$$\{y_1(\sigma),y_3(\bar\sigma)\}\cong-\frac{H}{\kappa}\left[2y(\sigma)-y(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma-\bar\sigma), \tag{4.11}$$

$$\{y_2(\sigma),y_3(\bar\sigma)\}\cong\frac{H}{\kappa}\left[2x(\sigma)-x(\bar\sigma)\right]\theta(\sigma-\bar\sigma), \tag{4.12}$$

where function $\theta(x)$ is defined in (4.5). Let us note that these two Poisson brackets are zero when $\sigma=\bar\sigma$ and/or field strength H is equal to zero. But if we take that $\sigma-\bar\sigma=2\pi$ then we have $\theta(2\pi)=1$ and it follows

$$\{y_1(\sigma+2\pi),y_3(\sigma)\}\cong-\frac{H}{\kappa}\left[4\pi N_y+y(\sigma)\right], \tag{4.13}$$

$$\{y_2(\sigma+2\pi),y_3(\sigma)\}\cong\frac{H}{\kappa}\left[4\pi N_x+x(\sigma)\right], \tag{4.14}$$

where N_x and N_y are winding numbers defined as

$$x(\sigma+2\pi)-x(\sigma)=2\pi N_x,\qquad y(\sigma+2\pi)-y(\sigma)=2\pi N_y. \tag{4.15}$$

From these relations we can see that if we choose such σ for which $x(\sigma)=0$ and $y(\sigma)=0$ then noncommutativity relations are proportional to winding numbers. On the other side, for winding numbers which are equal to zero there is still noncommutativity between T-dual coordinates.

4.2. Nonassociativity

In order to calculate Jacobi identity of the T-dual coordinates we first have to find Poisson brackets $\{y_1(\sigma),x(\bar\sigma)\}$ as well as $\{y_2(\sigma),y(\bar\sigma)\}$. We start with

$$\{\Delta y_1(\sigma,\sigma_0),x(\bar\sigma)\}=\left\{\int_{\sigma_0}^{\sigma}d\eta y_1'(\eta),x(\bar\sigma)\right\}, \tag{4.16}$$

and then use the T-dual transformation for x-direction in canonical form

$$\pi_x\cong\kappa y_1'. \tag{4.17}$$

From these two equations it follows

$$\{\Delta y_1(\sigma, \sigma_0), x(\bar{\sigma})\} \cong \frac{1}{\kappa}\left\{\int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta \pi_x(\eta), x(\bar{\sigma})\right\}, \tag{4.18}$$

which, using the standard Poisson algebra, produces

$$\{\Delta y_1(\sigma, \sigma_0), x(\bar{\sigma})\} \cong -\frac{1}{\kappa}\left[\theta(\sigma - \bar{\sigma}) - \theta(\sigma_0 - \bar{\sigma})\right]$$
$$\Longrightarrow \{y_1(\sigma), x(\bar{\sigma})\} \cong -\frac{1}{\kappa}\theta(\sigma - \bar{\sigma}). \tag{4.19}$$

The relation $\{y_2(\sigma), y(\bar{\sigma})\}$ can be obtained in the same way. Because the transformation law for y-direction is of the same form as for x-direction, the Poisson bracket is of the same form

$$\{y_2(\sigma), y(\bar{\sigma})\} \cong -\frac{1}{\kappa}\theta(\sigma - \bar{\sigma}). \tag{4.20}$$

Now we can calculate Jacobi identity using noncommutativity relations (4.11) and (4.12) and above two Poisson brackets

$$\begin{aligned}\{y_1(\sigma_1), y_2(\sigma_2), y_3(\sigma_3)\} &\equiv \{y_1(\sigma_1), \{y_2(\sigma_2), y_3(\sigma_3)\}\}\\ &+\{y_2(\sigma_2), \{y_3(\sigma_3), y_1(\sigma_1)\}\} + \{y_3(\sigma_3), \{y_1(\sigma_1), y_2(\sigma_2)\}\}\\ \cong -\frac{2H}{\kappa^2}&\left[\theta(\sigma_1 - \sigma_2)\theta(\sigma_2 - \sigma_3)\right.\\ &\left.+ \theta(\sigma_2 - \sigma_1)\theta(\sigma_1 - \sigma_3) + \theta(\sigma_1 - \sigma_3)\theta(\sigma_3 - \sigma_2)\right].\end{aligned} \tag{4.21}$$

Jacobi identity is nonzero which means that theory with R-flux is nonassociative. For $\sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ and $\sigma_1 = \sigma + 2\pi$ we get

$$\{y_1(\sigma + 2\pi), y_2(\sigma), y_3(\sigma)\} \cong \frac{2H}{\kappa^2}. \tag{4.22}$$

From the last two equations, general form of Jacobi identity and Jacobi identity for special choice of σ's, we see that presence of the coordinate dependent Kalb-Ramond field is a source of noncommutativity and nonassociativity.

5. Conclusion

In this article we have considered the closed bosonic string propagating in the three-dimensional constant metric and Kalb-Ramond field with just one nonzero component $B_{xy} = Hz$. This choice of background is in accordance with consistency conditions in the sense that all calculations were made in approximation linear in Kalb-Ramond field strength H. Geometrically, this settings corresponds to the torus with H flux. Then we performed standard Buscher T-dualization procedure along isometry directions, first along x and then along y direction. At the end we performed generalized T-dualization procedure along z direction and obtained nonlocal theory with R flux. Using the relations between initial and T-dual variables, called T-dual transformation laws, in canonical form we find the noncommutativity and nonassociativity relations between T-dual coordinates.

After T-dualization along x direction we obtained theory embedded in geometry known in literature as twisted torus geometry. The relation between initial and T-dual variables is trivial, $\pi_x \cong \kappa y_1'$, where π_x is x component of the canonical momentum of the initial theory and y_1 is coordinate T-dual to x. Consequently, flux H takes a role of connection, obtained theory is globally and locally well defined and commutative, because the coordinates and their canonically conjugated momenta satisfy the standard Poisson algebra (3.25).

The second T-dualization, along y direction, produces nongeometrical theory, in literature known as Q flux theory. The metric is the same as initial one and Kalb-Ramond field have the same form as initial up to minus sign. But, this theory has just local geometrical interpretation. We obtained that, in approximation linear in H, the transformation law in canonical form is again trivial, $\pi_y \cong \kappa y_2'$, where π_y is y component od the canonical momentum of the initial theory and y_2 is coordinate T-dual to y. As a consequence of the standard Poisson algebra (3.25), we conclude that Q flux theory is still commutative. This result seems to be opposite from the result of the reference [16] where in detailed calculation it is shown that Q flux theory is noncommutative. The difference is in the so called boundary condition i.e. winding condition. In the Ref. [16] they imposed nontrivial winding condition which mixes the coordinates and their T-dual partners (condition given in Eq. (C.18) of Ref. [16]) and the result is noncommutativity. In this article the trivial winding condition is imposed on x and y coordinates. The consequence is that Q flux theory is commutative. But as it is written in Ref. [16] on page 42, "a priori other reasonings could as well be pursued".

T-dualizing along coordinate z using the machinery of the generalized T-dualization procedure[20,21,23] we obtain the nonlocal theory (theory with R flux) and nontrivial transformation law in canonical form. Non-locality stems from the fact that background fields are expressed in terms of the variable ΔV which is defined as line integral. On the other side, dependence of the Kalb-Ramond field on z coordinate produces the $\beta^{\pm}(x, y)$ functions and nontrivial transformation law for π_z. Consequently, coordinate dependent background gives non-locality and, further, nonzero Poisson brackets of the T-dual coordinates. We can claim that there is a correlation between non-locality (R-flux theory) and closed string noncommutativity and nonassociativity. In addition, nonzero Poisson bracket implies nonzero Jacobi identity which is a signal of nonassociativity.

From the expressions (4.11), (4.12) and (4.21) it follows that parameters of noncommutativity and nonassociativity are proportional to the field strength H. That means that closed string noncommuatativity and nonassociativity are consequence of the fact that Kalb-Ramond field is coordinate dependent, $B_{xy} = Hz$, where H is an infinitesimal parameter according to the approximation of diluted flux. Using T-duality and trivial winding conditions we obtained noncommutativity relations. The noncommutativity relations are zero if $\sigma = \bar{\sigma}$ because in noncommuatativity relations function $\theta(\sigma - \bar{\sigma})$ is present, which is zero if its argument is zero. This is also at the first glance opposite to the result of Ref. [16], but, having in mind that origin of noncommutativity is not same, this difference is not surprising. If we made a round in sigma choosing $\sigma \to \sigma + 2\pi$ and $\bar{\sigma} \to \sigma$, because of $\theta(2\pi) = 1$, we obtained nonzero Poisson brackets. From the relations (4.13) and (4.14) we see that noncommutativity exists even in the case when winding numbers are zero, noncommutativity relations still stand unlike the result in [16]. Consequently, we can speak about some essential noncommutativity originating from non-locality.

We showed that in *ordinary* space coordinate dependent background is a sufficient condition for closed string noncommutativity. Some papers[36] show that noncommutativity is possible even in the constant background case. But that could be realized using the *double space formalism*. At the zeroth order the explanation follows from the fact that transformation law in canonical form is of the form $\pi_\mu \cong \kappa y'_\mu$, where y_μ is T-dual coordinate. Forming double space spanned by $Z^M = (x^\mu, y_\mu)$, we obtained noncommuative (double) space. In literature this kind of noncommutativity is called intrinsic one.

Appendix: Light-Cone Coordinates

In the paper we often use light-cone coordinates defined as

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma). \tag{A.1}$$

The corresponding partial derivatives are

$$\partial_\pm \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\pm} = \partial_\tau \pm \partial_\sigma. \tag{A.2}$$

Two dimensional Levi-Civita $\varepsilon^{\alpha\beta}$ is chosen in (τ, σ) basis as $\varepsilon^{\tau\sigma} = -1$. Consequently, in the light-cone basis the form of tensor is

$$\varepsilon_{lc} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.3}$$

The flat world-sheet metric is of the form in (τ, σ) and light-cone basis, respectively

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \eta_{lc} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \tag{A.4}$$

Acknowledgements

Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031. I also want to thank to Prof. Dr. Branislav Sazdović and Dr. Ljubica Davidović from Institute of Physics Belgrade for useful discussions.

Conflict of Interest

The authors have declared no conflict of interest.

Keywords

closed string, nonassociativity, noncommutativity, non-locality

Received: January 29, 2018

[1] H. S. Snyder, *Phys. Rev.* **1947**, *71*, 38.
[2] A. Connes, *Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math.* **1985**, *62*, 257.
[3] N. Seiberg, E. Witten, *JHEP* **1999**, *09*, 032.
[4] A. Connes, M. R. Douglas, A. Schwarz, *JHEP* **1998**, *02*, 003; M. R. Douglas, C. Hull, *JHEP* **1998**, *02*, 008; V. Schomerus, *JHEP* **1999**, *06*, 030; F. Ardalan, H. Arfaei, M. M. Sheikh-Jabbari, *JHEP* **1999**, *02*, 016; C. S. Chu, P. M. Ho, *Nucl. Phys.* **1999**, *B550*, 151; F. Ardalan, H. Arfaei, M. M. Sheikh-Jabbari, *Nucl. Phys.* **2000**, *B576*, 578; C. S. Chu, P. M. Ho, *Nucl. Phys.* **2000**, *B568*, 447; T. Lee, *Phys. Rev.* **2000**, *D62*, 024022; B. Nikolić, B. Sazdović, *Phys. Rev.* **2006**, *D74*, 045024; *Phys. Rev.* 2007, **D75**, 085011.
[5] M. Evans, B. Ovrut, *Phys. Rev.* **1989**, *D39*, 3016.
[6] D. Latas, V. Radovanovic, J. Trampetic, *Phys. Rev.* **2007**, *D76*,085006; M. Buric, V. Radovanovic, J. Trampetic, *JHEP* **2007**, *03*, 030; D. N. Blaschke, H. Grosse, J.-C. Wallet, *JHEP* **2013**, *06*, 038; C. P. Martin, C. Tamarit, *JHEP* **2009**, *11*, 092.
[7] B. Melic, K. Passek-Kumericki, J. Trampetic, *Phys. Rev.* **2005**, *D72*, 057502; M. Buric, D. Latas, V. Radovanovic, J. Trampetic, *Phys. Rev.* **2007**, *D 75*, 097701.
[8] D. Lust, *JHEP* **2010**, *12*, 084.
[9] K. Becker, M. Becker, J. Schwarz *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*; B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, **2004**; J. Polchinski, *String theory - Volume II*, Cambridge University Press, **1998**.
[10] T. Buscher, *Phys. Lett.* **1987**, *B 194*, 59; 1988, **201**, 466.
[11] M. Roček, E. Verlinde, *Nucl. Phys.* **1992**, *B 373*, 630.
[12] A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, *Phys. Rep.* **1994**, *244*, 77.
[13] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume, J. Barbon, Y. Lozano, *Nucl. Phys.* **1994**, *B 415*, 71.
[14] B. Nikolić, B. Sazdović, *Nucl. Phys.* **2010**, *B 836*, 100.
[15] D. S. Berman, D. C. Thompson, *Phys. Rept.* **2014**, *566*, 1.
[16] D. Andriot, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, *JHEP* **2013**, *06*, 021.
[17] D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Lust, P. Patalong, *Phys. Rev. Lett.* **2012**, *108*, 261602.
[18] D. Luest, arxiv:1205.0100 [hep-th]; R. Blumenhagen, A. Deser, D. Luest, E. Plauschinn, F. Rennecke, *J. Phys.* **2011**, *A44*, 385401; C. Condeescu, I. Florakis, D. Luest, *JHEP* **2012**, *04*, 121.
[19] J. Shelton, W. Taylor, B. Wecht, *JHEP* **2005**, *10*, 085; A. Dabholkar, C. Hull, *JHEP* **2006**, *05*, 009.
[20] Lj. Davidović, B. Sazdović, *EPJ* **2014**, *C 74*, 2683.
[21] Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *EPJ* **2015**, *C 75*, 576.
[22] Lj. Davidović, B. Nikolić, B. Sazdović, *EPJ* **2014**, *C 74*, 2734.
[23] Lj. Davidović, B. Sazdović, *JHEP* **2015**, *11*, 119.
[24] M. Duff, *Nucl. Phys.* **1990**, *B 335*, 610.
[25] A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **1990**, *B 242*, 163.
[26] A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys.* **1991**, *B 350*, 395.
[27] W. Siegel, *Phys. Rev.* **1993**, *D 48*, 2826.
[28] W. Siegel, *Phys. Rev.* **1993**, *D 47*, 5453.
[29] C. M. Hull, *JHEP* **2005**, *10*, 065.
[30] C. M. Hull, *JHEP* **2007**, *10*, 057; 2007, **07**, 080.
[31] D. S. Berman, M. Cederwall, M. J. Perry, *JHEP* **2014**, *09*, 066; D. S. Berman, C. D. A. Blair, E. Malek, M. J. Perry, *Int. J. Mod. Phys.* **2014**, *A29*, 15, 1450080; C. D. A. Blair, E. Malek, A. J. Routh, *Class. Quant. Grav.* **2014**, *31*, 20, 205011.
[32] C. M. Hull, R. A. Reid-Edwards, *JHEP* **2009**, *09*, 014.
[33] O. Hohm, B. Zwiebach, *JHEP* **2014**, *11*, 075.
[34] B. Sazdović, *Chin. Phys.* **2017**, *C 41*, 053101.
[35] B. Sazdović, *JHEP* **2015**, *08*, 055.
[36] L. Freidel, R. G. Leigh, Dj. Minic, *JHEP* **2017**, *09*, 060.
[37] S. Meljanac, S. Mignemi, J. Trampetic, J. You, *Phys. Rev.* **2017**, *D 96*, 045021; arXiv: 1711.09639.
[38] P. Aschieri, M. D. Ciric, R. J. Szabo, arXiv:1710.11467; R. Blumenhagen, M. Fuchs, *JHEP* **2016**, *07*, 019.
[39] C. G. Callan, D. Friedan, E. J. Martinec, M. J. Perry, *Nucl. Phys.* **1985**, *B262*, 593.

P r o c e e d i n g s

of the

8th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics

August 24 – 31, 2014, Belgrade, Serbia

Editors

B. Dragovich, I. Salom

Institute of Physics
Belgrade, 2015
SERBIA

Autor: Grupa autora

Naslov: 8th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: SUMMER SCHOOL AND CONFERENCE ON MODERN MATHEMATICAL PHYSICS

(Osmi naučni skup iz matematičke fizike: letnja škola i konferencija iz savremene matematičke fizike)

Izdavač: Institut za fiziku, Beograd, Srbija

Izdanje: Prvo izdanje
(SFIN year XXVIII Series A: Conferences No. A1 (2015))

Štampar: Ton Plus, Beograd

Tiraž: 150
ISBN: 978-86-82441-43-4

1. Dragović Branko
Matematička fizika-Zbornici

CONTENTS

Review and Research Works

Weakly curved background T-duals*

Lj. Davidović†
Institute of Physics, University of Belgrade, Serbia

B. Nikolić‡
Institute of Physics, University of Belgrade, Serbia

B. Sazdović§
Institute of Physics, University of Belgrade, Serbia

Abstract

We discuss the generalized T-dualization procedure, its connection to the standard procedure, and the results of its application to the arbitrary set of coordinates of the closed string moving in the weakly curved background. This background consists of a constant metric and linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field with infinitesimal strength. We unite all the results into a T-dualization diagram, representing all T-dual theories, the ways to obtain the theories from one another and the T-dual coordinate transformation laws connecting the corresponding coordinates.

* Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.

† e-mail address: ljubica@ipb.ac.rs
‡ e-mail address: bnikolic@ipb.ac.rs
§ e-mail address: sazdovic@ipb.ac.rs

T-duality is a symmetry seen in the string spectrum. It was observed that for toroidal compactifications [1], where one dimension is compactified on a circle of radius R and the corresponding dual dimension is compactified on a circle of radius $1/R$, one obtains the discription of a string with the same physical properties. So, there exist different string theories, describing the string in the geometrically different backgrounds, with the same predictions. Such a symmetry is not present in any point particle theory [2, 3, 4, 5], and because of that the explanation for T-duality was sought for in a fact that strings can wrap around compactified dimensions. Investigation of T-duality lead to a discovery of a Buscher T-dualization procedure [6, 7], which gave a prescription how to find the T-dual theory for same known theory. The procedure is applicable along isometry directions, what allowed the investigation of a backgrounds which do not depend on some coordinates. This procedure enabled the investigation of the properties of the background connected by T-duality. It was discovered that geometric backgrounds transform to the non-geometric backgrounds and these to different non-geometric backgrounds, which differ in a form of the background fluxes, some of which are not locally well defined [8, 9]. T-duality is also investigated for the double string theories, where T-duality is a manifest symmetry [10, 11, 12, 13].

In this talk we will discuss the results of T-dualizations done for the closed string moving in the weakly curved background, using the generalized T-dualization procedure, defined in our paper [14]. This background depends on all the space-time coordinates and as such was not a candidate for T-dualization using the standard T-dualization procedures. In paper [14], we presented generalized T-dualization procedure applicable to all space-time directions regardless of the possible background coordinate dependence. We obtained the T-dual theory which is a result of T-dualizing all the initial coordinates. In paper [15], we broadened the investigation by considering T-dualization of an arbitrary set of coordinates of both initial and its completely T-dual theory. We will recapitulate the results here and discuss further investigations. We obtained the T-dualization diagram describing the relation between all string theories T-dual to the string moving in a weakly curved background, their backgrounds and giving the T-duality laws connecting the corresponding coordinates.

So, let us start by the action describing a closed string moving in a coordinate dependent background

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \; \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(x) \partial_- x^\nu, \quad \partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma \tag{1}$$

given in the conformal gauge $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$. The background field composition is defined by

$$\Pi_{\pm\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}(x). \tag{2}$$

It consists of a symmetric metric tensor $G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}$ and an antisymmetric Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu} = -B_{\nu\mu}$. The background must obey the following space-time equations of motion

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_{\nu}{}^{\rho\sigma} = 0, \quad D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0, \tag{3}$$

in order to have a consistent quantum theory. We will consider one of the simplest coordinate dependent solutions, the weakly curved background, composed of a constant metric and linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field which has an infinitesimal field strength

$$G_{\mu\nu}(x) = const,\ B_{\mu\nu}(x) = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho, \quad b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = const. \tag{4}$$

What are the backgrounds T-dual to this background? As, the standard T-dualization procedure is applicable to coordinate directions which do not appear as background field arguments, and the weakly curved background depends on all space-time coordinates, this procedure could not provide the answer to this question. So, a generalization of a T-dualization procedure which does not have this limitation had to be made. The main difference between the procedures obviously must be connected to background fields argument. We presented the new T-dualization procedure in [14].

Both procedures are built as a localization of a global coordinate shift symmetry $\delta x^\mu = \lambda^\mu = const$. One introduces the gauge fields v^μ_α and substitutes the ordinary derivatives with the covariant ones

$$\partial_\alpha x^\mu \to D_\alpha x^\mu = \partial_\alpha x^\mu + v^\mu_\alpha. \tag{5}$$

Imposing the following transformation law for the gauge fields

$$\delta v^\mu_\alpha = -\partial_\alpha \lambda^\mu, \quad (\lambda^\mu = \lambda^\mu(\tau, \sigma)) \tag{6}$$

one obtains that $\delta D_\alpha x^\mu = 0$. If the background does not depend on the coordinates which are T-dualized the gauge invariant action is already obtained. But, what if the background depends on all the coordinates? The additional step must be introduced. It consists of a substitution of background field argument (the coordinate x^μ), by the invariant argument (invariant coordinate) defined as a line integral of the covariant derivatives of the original coordinate

$$\Delta x^\mu_{inv} \equiv \int_P d\xi^\alpha\, D_\alpha x^\mu = x^\mu - x^\mu(\xi_0) + \Delta V^\mu, \tag{7}$$

where

$$\Delta V^\mu \equiv \int_P d\xi^\alpha v^\mu_\alpha. \tag{8}$$

Consequently the arguments of the background fields will be nonlocal. Here, they are defined as the line integrals of the gauge fields, and as such are nonlocal. Later, once the explicit form of T-dual theories is obtained the non locality will appear as dependence on double coordinates.

In order to obtain the physically equivalent theories, one must make the introduced gauge fields nonphysical which is done by requiring that there field strength

$$F^{\mu}_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha v^\mu_\beta - \partial_\beta v^\mu_\alpha \tag{9}$$

must be zero. This is achieved by adding the Lagrange multiplier y_μ term to the Lagrangian. Finally, the gauge invariant action, physically equivalent to the initial action is

$$S_{inv} = \kappa \int d^2\xi \Big[D_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(\Delta x_{inv}) D_- x^\nu + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big]. \tag{10}$$

Fixing the gauge $x^\mu(\xi) = x^\mu(\xi_0)$, one obtains

$$S_{fix}[y, v_\pm] = \kappa \int d^2\xi \Big[v^\mu_+ \Pi_{+\mu\nu}(\Delta V) v^\nu_- + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big]. \tag{11}$$

The gauge fixed action is the main crossway of the procedure, for an appropriate equation of motion it can transform both to initial action and to the T-dual action. For the equation of motion obtained varying the action over the Lagrange multipliers $\partial_+ v^\mu_- - \partial_- v^\mu_+ = 0$, with solution $v^\mu_\pm = \partial_\pm x^\mu$, the gauge fixed action reduces to the initial action. For the equation of motion obtained varying the action over the gauge fields $\Pi_{\mp\mu\nu}[\Delta V] v^\nu_\pm + \frac{1}{2}\partial_\pm y_\mu = \mp \beta^\mp_\mu[V]$, where $\beta^\alpha_\mu[V] \equiv \partial_\mu B_{\nu\rho} \epsilon^{\alpha\beta} V^\nu \partial_\beta V^\rho$, one obtains the T-dual theory. Comparing the solutions for the gauge fields in these two directions, one obtains the T-dual coordinate transformation laws. So, for application along all directions we obtain the following connection

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \, \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(x) \partial_- x^\nu \Leftrightarrow {}^\star S[y] = \frac{\kappa^2}{2} \int d^2\xi \, \partial_+ y_\mu \Theta^{\mu\nu}_-(\Delta V) \partial_- y_\nu, \tag{12}$$

with $\Delta V^\mu = V^\mu(\xi) - V^\mu(\xi_0)$, $\quad V^\mu = (g^{-1})^{\mu\nu}[(2bG^{-1})_\nu{}^\rho y_\rho + \tilde{y}_\nu]$. The dual background field composition is defined by

$$\Theta^{\mu\nu}_\pm = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1} \Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}, \tag{13}$$

and consequently the T-dual background are

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} \quad &\Leftrightarrow \quad {}^\star G^{\mu\nu}(y, \tilde{y}) = (G_E^{-1})^{\mu\nu}(\Delta V), \\ B_{\mu\nu}(x) \quad &\Leftrightarrow \quad {}^\star B^{\mu\nu}(y, \tilde{y}) = \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu}(\Delta V), \end{aligned} \tag{14}$$

where $G_{E\mu\nu}$ and $\theta^{\mu\nu}$ are the effective metric and the noncommutativity parameter for open bosonic string, which are

$$G_{E\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}, \; \theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1} B G^{-1})^{\mu\nu}. \tag{15}$$

But what if one does not consider T-dualization over all coordinates, but only some set of coordinates. To investigate this problem, let us mark a T-dualization along direction x^μ by T^μ and a T-dualization along dual direction y_μ by T_μ. Also mark the T-dualizations along some d initial directions, all other $D-d$ initial directions, and all initial directions by

$$\mathcal{T}^a = \circ_{n=1}^{d} T^{\mu_n}, \qquad \mathcal{T}^i = \circ_{n=d+1}^{D} T^{\mu_n}, \qquad \mathcal{T} = \circ_{n=1}^{D} T^{\mu_n} \tag{16}$$

and T-dualizations along corresponding dual directions by

$$\mathcal{T}_a = \circ_{n=1}^{d} T_{\mu_n}, \qquad \mathcal{T}_i = \circ_{n=d+1}^{D} T_{\mu_n}, \qquad \widetilde{\mathcal{T}} = \circ_{n=1}^{D} T_{\mu_n} \tag{17}$$

$\mu_n \in (0, 1, \dots, D-1)$. We showed in [15] that these T-dualizations form an Abelian group

$$\mathcal{T}^i \circ \mathcal{T}^a = \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}_i \circ \mathcal{T}_a = \widetilde{\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}^a = 1. \tag{18}$$

We showed that all the theories T-dual to the theory of the closed bosonic string are the part of the T-dualization diagram, given by

$$\begin{tikzcd}
& S[x^i, y_a] \arrow[dl, shift left, "\mathcal{T}_a"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{T}^i"] & \\
S[x^\mu] \arrow[ur, shift left, "\mathcal{T}^a"] \arrow[rr, shift left, "\mathcal{T}"] & & S[y_\mu]. \arrow[ul, shift left, "\mathcal{T}_i"] \arrow[ll, shift left, "\tilde{\mathcal{T}}"]
\end{tikzcd}$$

This diagram clearly describes the connection between arbitrary theory and the initial and completely T-dual theory. The explicit form of the theory obtained T-dualizing some set (marked by a) of the initial coordinates is the following

$$\begin{aligned}
S[x^i, y_a] \;=\; \kappa \int d^2\xi \Big[& \partial_+ x^i \overline{\Pi}_{+ij}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \partial_- x^j \\
& -\kappa\, \partial_+ x^i \Pi_{+ia}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \tilde{\Theta}_-^{ab}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \partial_- y_b \\
& +\kappa\, \partial_+ y_a \tilde{\Theta}_-^{ab}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \Pi_{+bi}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \partial_- x^i \\
& +\frac{\kappa}{2}\, \partial_+ y_a \tilde{\Theta}_-^{ab}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \partial_- y_b \Big].
\end{aligned} \tag{19}$$

The new background field compositions $\overline{\Pi}_{\pm ij}$ and $\tilde{\Theta}_\pm^{ab}$ are defined as the inveres of the ordinary background field compositions $\Theta_\mp^{jk}$ and $\Pi_{\mp bc}$ reduced to the appropriate d and $D-d$ dimensional subspaces

$$\overline{\Pi}_{\pm ij} \Theta_\mp^{jk} = \Theta_\mp^{kj} \overline{\Pi}_{\pm ji} = \frac{1}{2\kappa} \delta_i^k, \tag{20}$$

$$\tilde{\Theta}^{ab}_{\pm}\Pi_{\mp bc} = \Pi_{\mp cb}\tilde{\Theta}^{ba}_{\pm} = \frac{1}{2\kappa}\delta^a_c. \tag{21}$$

It can be shown that

$$\overline{\Pi}_{+ij} \equiv \Pi_{+ij} - 2\kappa\Pi_{+ia}\tilde{\Theta}^{ab}_{-}\Pi_{+bj}. \tag{22}$$

The argument of the background fields is

$$\begin{aligned}\Delta V^{(0)a}(x^i, y_a) &= -\kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta x^{(0)i} \\ &- \kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta\tilde{x}^{(0)i} \\ &- \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta y^{(0)}_b - \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta\tilde{y}^{(0)}_b, \end{aligned}\tag{23}$$

where $\Delta x^\mu(\xi) = x^\mu(\xi) - x^\mu(\xi_0)$ and $\Delta y_\mu(\xi) = y_\mu(\xi) - y_\mu(\xi_0)$ while $\Delta\tilde{x}^\mu(\xi)$ and $\Delta\tilde{y}_\mu(\xi)$ are their duals, defined by

$$\Delta\tilde{x}^\mu(\xi) = \int_P d\xi^\alpha\, \varepsilon^\beta{}_\alpha\, \partial_\beta x^\mu, \quad \Delta\tilde{y}(\xi) = \int_P d\xi^\alpha\, \varepsilon^\beta{}_\alpha\, \partial_\beta y_\mu. \tag{24}$$

Calculating the symmetric and antisymmetric part of the background fields we obtain the T-dual metric and Kalb-Ramond field:

$$\begin{aligned}&\bullet G_{ij} = \overline{G}_{ij} = G_{ij} - G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -2\kappa\Big(B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} + G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj}\Big) - 4B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj} \\ &\bullet B_{ij} = \overline{B}_{ij} = B_{ij} - \frac{\kappa}{2}G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} - B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj} - 2\kappa B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj} \\ &\bullet G^{ab} = (\tilde{G}^{-1}_E)^{ab} \\ &\bullet B^{ab} = \frac{\kappa}{2}\tilde{\theta}^{ab} \\ &\bullet G^a{}_i = \kappa\tilde{\theta}^{ab}G_{bi} + 2(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bi} \\ &\bullet B^a{}_i = \kappa\tilde{\theta}^{ab}B_{bi} + \frac{1}{2}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bi}. \end{aligned}\tag{25}$$

As the constituents of the dual background field there appear the effective metric in the d-dimensional subspace a, defined by

$$\tilde{G}_{Eab} \equiv G_{ab} - 4B_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd}B_{db}, \tag{26}$$

the non-commutativity parameter in the same subspace

$$\tilde{\theta}^{ab} \equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ac}B_{cd}(\tilde{G}^{-1})^{db}, \tag{27}$$

which combined give the new theta function $\tilde{\Theta}^{ab}_{\pm} = \tilde{\theta}^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ab}$.

Every arrow in the T-duality diagram is accompanied with the appropriate T-dual coordinate transformation law. These are obtained comparing the solutions for the gauge fields in a T-dualization procedures performed between two actions in both directions. The laws for transitions

$$\mathcal{T}^a : S[x^\mu] \to S[x^i, y_a], \quad \mathcal{T}_a : S[x^i, y_a] \to S[x^\mu],$$

which are inverse to each other, are given by

$$\begin{aligned} \partial_\mp x^a &\cong -2\kappa \tilde{\Theta}^{ab}_{\mp}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \cdot \\ &\quad \cdot \Big[\Pi_{\pm bi}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a)) \partial_\mp x^i + \frac{1}{2}\partial_\mp y_b \mp \beta^\pm_b(x^i, V^a(x^i, y_a)) \Big] \\ x^{(0)a} &\cong V^{(0)a}(x^i, y_a) \end{aligned} \tag{28}$$

and its inverse

$$\begin{aligned} \partial_\mp y_a &\cong -2\Pi_{\pm a\mu}(x)\partial_\mp x^\mu \pm 2\beta^\pm_a(x), \\ y^{(0)}_a &\cong U^{(0)}_a(x). \end{aligned} \tag{29}$$

These relations enable an investigation of the closed string non-commutativity and other geometric properties of the T-dual backgrounds. One can determine the geometric structure for an arbitrary sigma model in a T-duality diagram, find the connection between the Poisson structures of T-dual theories and the relations between non-commutativity parameters. The coordinates of the closed string are commutative when the string moves in a constant background. In a three dimensional space with the Kalb-Ramond field depending on one of the coordinates, successive T-dualizations along isometry directions lead to a theory with Q flux and the non-commutative coordinates [16, 17, 18]. Using the generalized T-dualization procedure, we found the non-commutativity characteristics of a closed string moving in the weakly curved background [15] comparing the initial and completely T-daul theory. One can expect the further investigations will reveal novelties regarding the form of the fluxes of all T-dual background forming a diagram. For now it is known that all fluxes are of type R.

References

[1] L.Brink, M.B. Green, J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B 198** (1982) 474; K. Kikkawa and M.Yamasaki, *Phys. Lett.* **B 149** (1984) 357; N. Sakai and I. Senda, *Prog. Theor. Phys.* **75** (1984) 692.

[2] A. Giveon, M. Porrati, E. Rabinovici, Phys. Rep. **244**, 77-202 (1994).

[3] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **41**, 1 (1995).

[4] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Second Edition, Cambridge University Press (2009).

[5] K. Becker, M. Becker and J. H. Schwarz, *String Theory and M-Theory - A Modern Introdution*, Cambridge University Press (2007).

[6] T. H. Buscher, Phys. Lett. **B 201** No. 4, 466 (1988).

[7] M. Roček and E. Verlinde, Nucl. Phys. **B 373**, 630 (1992).

[8] J. Shelton, W. Taylor and B. Wecht, JHEP **10**, 085 (2005).

[9] R. Blumenhagen, A. Deser, D. Lüst, E. Plauschinn, F. Rennecke, J. Phys. **A 44**, 385401 (2011).

[10] O. Hohm, Prog. Theor. Phys. Suppl. **188**, 116-125 (2011).

[11] C. Hull and B. Zwiebach, JHEP **09**, 099 (2009).

[12] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, JHEP **08**, 008 (2010).

[13] O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, JHEP **07**, 016 (2010).

[14] Lj. Davidović and B. Sazdović, EPJ**C 74**(1), 2683 (2014).

[15] Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, *T-duality diagram for a weakly curved background*, arXiv:1406.5364 [hep-th].

[16] D. Lüst, JHEP **12**, 084 (2010).

[17] D. Andriot, M. Larfors, D. Lüst, P. Patalong, JHEP **06**, 021 (2013).

[18] D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Lüst, P. Patalong, Phys. Rev. Lett. **108** , 261602 (2012).

Closed string noncommutativity in the weakly curved background*

Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović†
Institute of Physics, University of Belgrade
11001 Belgrade, P.O.Box 57, Serbia

Abstract

We consider the closed bosonic string moving in the weakly curved background. Using T-duality transformation laws we calculate the Poisson brackets of the coordinates in the T-dual space assuming that initial theory is geometric one, which means that standard Poisson algebra is obeyed. The result is that the commutative initial theory is equivalent to the non-commutative T-dual theory. All noncommutativity parameters are infinitesimal and proportional to the $B_{\mu\nu\rho}$, field strength of Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$. In addition we find the algebra of the T-dual winding numbers and momenta in terms of the winding numbers and momenta of the initial theory.

1. Introduction

In order to obtain noncommutativity in the open string case it is enough to consider the open string in the presence of the *constant* gravitational $G_{\mu\nu}$ and Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$ and use the boundary conditions [1, 2]. Treating boundary conditions as canonical constraints and solving them, one gets the initial coordinates expressed in terms of the Ω even effective coordinates and momenta, where Ω is world-sheet parity transformation $\Omega : \sigma \to -\sigma$. Because effective variables have nonzero Poisson bracket (PB), the PB between initial coordinates is also nonzero. The noncommutativity parameter is proportional to the Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$.

There is one interesting thing which we noted in the open string case. The effective metric and the noncommutativity parameter are (up to some constants) the backgroud fields of the T-dual theory. As we know T-dual theory is physically equivalent to the initial one in the sense they have the same degrees of freedom - one at the scale R and the T-dual one at the scale $1/R$. The mathematical realization of the T-duality goes through Buscher procedure [3]. As a result of the procedure we get the relation between initial and T-dual variables which we call *transformation laws*.

* Work supported in part by the Serbian Ministry of Education and Science, under contract number No.171031.

† e-mail address: ljubica, bnikolic, sazdovic@ipb.ac.rs

The closed strings do not have endpoints, so in the constant background there are no boundary conditions. To obtain noncommutativity in the closed string case we have to use T-duality as a helping tool. But, in the constant background case, T-duality relates σ-derivatives of the coordinates of one theory with the momenta of its T-dual one. Assuming that momenta of the initial theory commute (geometric theory) it follows that the T-dual coordinates commute as well. Consequently, in the constant background case there is no closed string non-commutativity.

It is obvious that T-duality is just one part of the solution in order to get the closed string noncommutativity. The second part is coordinate dependent background obeying the space-time field equations [4, 5]. Considering the closed string in the constant gravitational field $G_{\mu\nu}$ and Kalb-Ramond field depending on one coordinate, the closed string non-commutativity was first observed in the paper [6], and investigated further in [7, 8, 9]. In these articles 3-torus is considered, where $B_{\mu\nu}$ depends on one coordinate and T-dualization is performed along two other coordinates (isometry directions) using standard Buscher procedure [3].

One can ask if it is possible to do that in the background where $B_{\mu\nu}$ depends on all space-time coordinates. The answer is affirmative but in order to achieve that we have to use the generalized T-duality procedure presented in details in [10] and to apply it to the weakly curved background. The weakly curved background used in the present article is defined by constant gravitational $G_{\mu\nu} = const$ and the linear Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3}B_{\mu\nu\rho}x^\rho$, where the field strength $B_{\mu\nu\rho}$ is supposed to be infinitesimal. Such background obeys space-time field equations [4, 5] in the linear approximation in $B_{\mu\nu\rho}$.

We perform the generalized T-dualization procedure [10] along all the coordinates and obtain the T-duality transformation law, $\partial_\pm y_\mu = \partial_\pm y_\mu(\partial_\pm x)$, where $\partial_\pm$ are world-sheet partial derivatives. Using canonical formalism, the T-dual coordinates are expressed in terms of the original variables, $y'_\mu \cong \frac{1}{\kappa}\pi_\mu - \beta^0_\mu[x]$, where π_μ are canonically conjugated momenta to the coordinates x^μ. The infinitesimal expression β^0_μ is the correction in comparison to the flat background case. Assuming that the coordinates and momenta of the original theory satisfy standard Poisson algebra (initial theory is geometric one), we get the coordinate noncommutativity relations in the T-dual picture. In addition, we obtain the complete algebra of the T-dual winding numbers and momenta.

2. Generalized T-duality and noncommutativity

We consider the closed bosonic string moving in the D-dimensional space-time described by the action

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\ \partial_+ x^\mu \left(B_{\mu\nu}[x] + \frac{1}{2} G_{\mu\nu}[x] \right) \partial_- x^\nu \,, \tag{1}$$

where the light-cone coordinates are defined as $\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$ and the corresponding derivatives $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$. In order to keep conformal invariance on the quantum level, the background fields have to obey the following one-loop consistency conditions [4, 5]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_{\nu}{}^{\rho\sigma} = 0, \quad D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0\,. \tag{2}$$

Here $B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ is the field strength of the field $B_{\mu\nu}$, and $R_{\mu\nu}$ and D_μ are Ricci tensor and the covariant derivative with respect to the space-time metric.

The solution of the equations in the first order in $B_{\mu\nu\rho}$, so called the weakly curved background, [7, 10, 11, 12], is defined by

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}[x] &= const, \\ B_{\mu\nu}[x] &= b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho, \qquad b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = const. \end{aligned} \tag{3}$$

Here, the field strength $B_{\mu\nu\rho}$ is infinitesimal.

Applying the generalized T-dualization procedure [10] on the closed string propagating in the weakly curved background, we obtain the T-dual action

$$^\star S[y] = \frac{\kappa^2}{2} \int d^2\xi \; \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}[\Delta V[y]] \partial_- y_\nu, \tag{4}$$

where

$$\begin{aligned} \Theta_\pm^{\mu\nu} &\equiv -\frac{2}{\kappa} (G_E^{-1} \Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa} (G_E^{-1})^{\mu\nu}\,, \\ G_{E\mu\nu} &\equiv G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}\,, \quad \Pi_{\pm\mu\nu} = B_{\mu\nu} \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

The argument ΔV is defined nonlocally as

$$\Delta V^\mu[y] = -\kappa \theta_0^{\mu\nu} \Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu} \Delta \tilde{y}_\nu\,, \tag{6}$$

where

$$\Delta y_\mu = \int_P (d\tau \dot{y}_\mu + d\sigma y'_\mu) = y_\mu(\xi) - y_\mu(\xi_0), \quad \Delta \tilde{y}_\mu = \int_P (d\tau y'_\mu + d\sigma \dot{y}_\mu), \tag{7}$$

and

$$g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4(bG^{-1}b)_{\mu\nu}, \quad \theta_0^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa} (g^{-1} b G^{-1})^{\mu\nu}\,. \tag{8}$$

It is obvious from the definitions (7) that these two coordinates are related by the following expressions, $\dot{y}_\mu = \tilde{y}'_\mu$, $y'_\mu = \dot{\tilde{y}}_\mu$.

The transformation laws connecting initial and T-dual coordinates play the key role in our considerations. To be more precise, we obtain from T-dualization procedure the relations between world-sheet derivatives of the initial and T-dual coordinates

$$\partial_\pm x^\mu \cong -\kappa \Theta_\pm^{\mu\nu}[\Delta V] \Big[\partial_\pm y_\nu \pm 2\beta_\nu^\mp[V] \Big], \tag{9}$$

where

$$\beta^{\pm}_{\mu}[x] = \frac{1}{2}(\beta^0_\mu \pm \beta^1_\mu) = \mp\frac{1}{2}h_{\mu\nu}[x]\partial_\mp x^\nu\,,$$
$$\beta^0_\mu[x] = h_{\mu\nu}[x]x'^\nu,\ \beta^1_\mu[x] = -h_{\mu\nu}[x]\dot{x}^\nu\,. \tag{10}$$

Because we use the canonical formalism, we must have these transformation laws in the canonical form

$$x'^\mu \cong \frac{1}{\kappa}\,{}^\star\pi^\mu - \kappa\theta_0^{\mu\nu}\beta^0_\nu[V], \tag{11}$$
$$\pi_\mu \cong \kappa y'_\mu + \kappa\beta^0_\mu[V]\,, \tag{12}$$

where π_μ and ${}^\star\pi^\mu$ are canonically conjugated momenta to the coordinates x^μ and y_μ, respectively. It is shown in Ref. [10] that the T-dual of the T-dual action is the initial one. If we want to have T-dual coordinates in terms of the initial ones, we just have to invert the relation (9)

$$\partial_\pm y_\mu \cong -2\Pi_{\mp\mu\nu}[\Delta x]\partial_\pm x^\nu \mp 2\beta^\mp_\mu[x]. \tag{13}$$

The canonical form of the T-dual transformations is

$$y'_\mu \cong \frac{1}{\kappa}\pi_\mu - \beta^0_\mu[x], \tag{14}$$
$${}^\star\pi^\mu \cong \kappa x'^\mu + \kappa^2\theta_0^{\mu\nu}\beta^0_\nu[x]. \tag{15}$$

Our intention is to calculate the PB's of the T-dual variables y_μ and $\tilde{y}_\mu$ using PB algebra of the initial variables. Consequently, we assume that initial theory is geometric which means that coordinates x^μ and momenta π_ν satisfy standard PB algebra

$$\{x^\mu(\sigma),\pi_\nu(\bar\sigma)\} = \delta^\mu_\nu\delta(\sigma-\bar\sigma),\quad \{x^\mu(\sigma),x^\nu(\bar\sigma)\}=0,\quad \{\pi_\mu(\sigma),\pi_\nu(\bar\sigma)\}=0. \tag{16}$$

In this article we will calculate, besides already mentioned PB algebra of the T-dual coordinates, also the algebra of the T-dual winding numbers and momenta. For both purposes, the first step is introducing the quantity

$$\Delta Y_\mu(\sigma,\sigma_0) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\eta\, Y'_\mu(\eta) = Y_\mu(\sigma) - Y_\mu(\sigma_0), \tag{17}$$

where $Y_\mu = (y_\mu, \tilde{y}_\mu)$. The second step is to calculate their PB's. It is obvious that key relation which we have to calculate is PB between σ derivatives of Y's. When we calculate it in three possible cases it turns out that it can be written in the form

$$\{X'_\mu(\sigma), Y'_\nu(\bar\sigma)\} \cong K'_{\mu\nu}(\sigma)\delta(\sigma-\bar\sigma) + L_{\mu\nu}(\sigma)\delta'(\sigma-\bar\sigma)\,. \tag{18}$$

Integrating this relation by parts over σ and $\bar{\sigma}$, after straightforward calculation, we extract PB we are searching for

$$\{X_\mu(\tau,\sigma), Y_\nu(\tau,\bar{\sigma})\} \cong -\left[K_{\mu\nu}(\sigma) - K_{\mu\nu}(\bar{\sigma}) + L_{\mu\nu}(\bar{\sigma})\right]\theta(\sigma-\bar{\sigma})\,, \tag{19}$$

where $\theta(\sigma)$ is the step function defined as

$$\theta(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } \sigma = 0 \\ 1/2 & \text{if } 0 < \sigma < 2\pi, \\ 1 & \text{if } \sigma = 2\pi \end{cases} \quad \sigma \in [0, 2\pi]. \tag{20}$$

This is a general form of the relation. Using transforation laws we calculate PB's in three cases: $\{y'_\mu(\sigma), y'_\nu(\bar{\sigma})\}$, $\{y'_\mu(\sigma), \tilde{y}'_\nu(\bar{\sigma})\}$ and $\{\tilde{y}'_\mu(\sigma), \tilde{y}'_\nu(\bar{\sigma})\}$, and express them in the form of (18). Reading the corresponding values of K and L and using (19), we get the noncommutativity relations for T-dual closed string coordinates

$$\{y_\mu(\sigma), y_\nu(\bar{\sigma})\} \cong -\frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar{\sigma})]\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{21}$$

$$\{y_\mu(\sigma), \tilde{y}_\nu(\bar{\sigma})\} \cong -\Big\{\frac{1}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}[\tilde{x}^\rho(\sigma) - \tilde{x}^\rho(\bar{\sigma})] - \frac{3}{2\kappa}\Gamma^E_{\rho,\mu\nu}[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar{\sigma})]$$
$$+\frac{1}{\kappa}g_{\mu\nu} - \frac{3}{2\kappa}\,\Gamma^E_{\rho,\mu\nu}\,x^\rho(\bar{\sigma})\Big\}\theta(\sigma-\bar{\sigma}), \tag{22}$$

$$\{\tilde{y}_\mu(\sigma), \tilde{y}_\nu(\bar{\sigma})\} \cong -\Big\{-\frac{1}{\kappa}\Big[B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha}Q^{\alpha\beta}{}_\rho g_{\beta\nu}\Big][x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar{\sigma})] \tag{23}$$
$$+\Big[-\frac{3}{2\kappa}\Big(\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^E_{\nu,\mu\rho}\Big) + \frac{4}{\kappa}B_{\mu\nu\sigma}(G^{-1}b)^\sigma{}_\rho\Big][\tilde{x}^\rho(\sigma) - \tilde{x}^\rho(\bar{\sigma})]\Big\}\theta(\sigma-\bar{\sigma})\,,$$

where

$$\tilde{x}'^\mu = \frac{1}{\kappa}(G^{-1})^{\mu\nu}\pi_\nu + 2(G^{-1}B)^\mu{}_\nu x'^\nu\,. \tag{24}$$

Here the infinitesimal fluxes are defined as

$$\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} = \frac{1}{2}\Big(\partial_\nu G^E_{\mu\rho} + \partial_\rho G^E_{\mu\nu} - \partial_\mu G^E_{\nu\rho}\Big) = -\frac{4}{3}\Big(B_{\mu\sigma\nu}(G^{-1}b)^\sigma{}_\rho + B_{\mu\sigma\rho}(G^{-1}b)^\sigma{}_\nu\Big), \tag{25}$$

$$Q^{\mu\nu}{}_\rho = -\frac{1}{3}\Big[(g^{-1})^{\mu\sigma}(g^{-1})^{\nu\tau} - \kappa^2\theta_0^{\mu\sigma}\theta_0^{\nu\tau}\Big]B_{\sigma\tau\rho}. \tag{26}$$

For $\sigma = \bar{\sigma}$ we obtain that all PB's vanish, and consequently, coordinates commute. Also we can consider $\sigma = \bar{\sigma} + 2\pi$, which is the same point on the world-sheet as our first choice $\sigma = \bar{\sigma}$. Taking $\sigma = \bar{\sigma} + 2\pi$, three noncommutativity relations take the form

$$\{y_\mu(\sigma + 2\pi), y_\nu(\sigma)\} \cong -\frac{2\pi}{\kappa}B_{\mu\nu\rho}N^\rho\,, \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
&\{y_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} + \{y_\mu(\sigma), \tilde{y}_\nu(\sigma+2\pi)\} \cong -\frac{4\pi}{\kappa^2} B_{\mu\nu\rho} p^\rho \\
+ \quad &\frac{\pi}{\kappa}\left(3\Gamma^E_{\rho,\mu\nu} - 8B_{\mu\nu\lambda} b^\lambda{}_\rho\right) N^\rho ,
\end{aligned} \tag{28}$$

and

$$\begin{aligned}
&\{\tilde{y}_\mu(\sigma+2\pi), \tilde{y}_\nu(\sigma)\} \cong \\
\cong \quad &\frac{2\pi}{\kappa}\left[-B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha} Q^{\alpha\beta}{}_\rho g_{\beta\nu} + 2B_{\mu\nu}{}^\lambda g_{\lambda\rho} + 3\left(\Gamma^E_{\mu,\nu\lambda} - \Gamma^E_{\nu,\mu\lambda}\right) b^\lambda{}_\rho\right] N^\rho \\
+ \quad &\frac{\pi}{\kappa^2}\left[3\left(\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^E_{\nu,\mu\rho}\right) p^\rho - 8B_{\mu\nu\lambda} b^\lambda{}_\rho\right] p^\rho ,
\end{aligned} \tag{29}$$

where $N^\mu = \frac{1}{2\pi}\left[x^\mu(\sigma+2\pi) - x^\mu(\sigma)\right]$ is winding number of the initial coordinates and

$$p_\mu = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma^{\sigma+2\pi} d\eta \pi_\mu(\eta) , \tag{30}$$

is mean value of the momentum π_μ. Note that all three PB's are proportional to the Kalb-Ramond field strength which means they are infinitesimal.

In addition we can obtain the algebra of the T-dual winding number and momenta defined as

$$\Delta y_\mu(2\pi, 0) = 2\pi {}^\star N_\mu , \quad \Delta\tilde{y}_\mu(2\pi, 0) = 2\pi {}^\star P_\mu , \tag{31}$$

while we introduced earlier

$$\Delta x^\mu(2\pi, 0) = 2\pi N^\mu , \quad \Delta\tilde{x}^\mu(2\pi, 0) = 2\pi P^\mu . \tag{32}$$

Using (17), (18), transformation laws and above definitions we have

$$\{{}^\star N_\mu, {}^\star N_\nu\} = \frac{1}{\pi\kappa} B_{\mu\nu\rho} N^\rho , \tag{33}$$

$$\{{}^\star N_\mu, {}^\star P_\nu\} = \frac{1}{\pi\kappa} B_{\mu\nu\rho} P^\rho - \frac{3}{4\pi\kappa}\Gamma^E_{\rho,\mu\nu} N^\rho , \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\{{}^\star P_\mu, {}^\star P_\nu\} \quad = \quad &-\frac{1}{\pi\kappa}\left(B_{\mu\nu\rho} - 6g_{\mu\alpha} Q^{\alpha\beta}{}_\rho g_{\beta\nu}\right) N^\rho \\
+ \quad &\frac{1}{\pi}\left[-\frac{3}{2\kappa}(\Gamma^E_{\mu,\nu\rho} - \Gamma^E_{\nu,\mu\rho}) + \frac{4}{\kappa} B_{\mu\nu\sigma}(G^{-1}b)^\sigma{}_\rho\right] P^\rho .
\end{aligned}$$

3. Concluding remarks

In the present article we considered the theory describing the closed bosonic string moving in the weakly curved background and derived the non-commutativity relations using canonical approach.

We applied generalized T-duality procedure and obtained the transformation laws connecting the initial and T-dual variables. They, expressed in the canonical form, have the central role in calculation of the PB's of the T-dual coordinates y_μ and $\tilde{y}_\mu$. Infinitesimal Kalb-Ramond field strength, as a part of the function β_μ, gives the main contribution to the noncommutativity parameters. The result is that we showed the physical equivalence of the commutative initial theory and noncommutative T-dual one in linear approximation in the field strength $B_{\mu\nu\rho}$.

The general structure of the non-commutativity relations is

$$\{Y_\mu(\sigma), Y_\nu(\bar{\sigma})\} = \{F_{\mu\nu\rho}\,[x^\rho(\sigma) - x^\rho(\bar{\sigma})] + \tilde{F}_{\mu\nu\rho}\,[\tilde{x}^\rho(\sigma) - \tilde{x}^\rho(\bar{\sigma})]\}\theta(\sigma - \bar{\sigma})\,, \tag{35}$$

where $Y_\mu = (y_\mu, \tilde{y}_\nu)$ and $F_{\mu\nu\rho}$ and $\tilde{F}_{\mu\nu\rho}$ are the constant and infinitesimally small fluxes. At the same points, for $\sigma = \bar{\sigma}$ all PB's are zero. In the important particular case for $\sigma = \bar{\sigma} + 2\pi$ we get

$$\{Y_\mu(\sigma + 2\pi), Y_\nu(\sigma)\} = 2\pi \left[(F_{\mu\nu\rho} + 2\tilde{F}_{\mu\nu\alpha} b^\alpha_\rho) N^\rho + \frac{1}{\kappa}\tilde{F}_{\mu\nu}{}^\rho p_\rho\right], \tag{36}$$

where N^μ and p_μ are winding numbers and momenta of the original theory. In addition we calculated the PB algebra of the T-dual winding numbers and momenta in terms of the initial ones.

References

[1] F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari, *JHEP* **02** (1999) 016; C. S. Chu and P. M. Ho, *Nucl. Phys.* **B550** (1999) 151; N. Seiberg and E. Witten, *JHEP* **09** (1999) 032; F. Ardalan, H. Arfaei and M. M. Sheikh-Jabbari *Nucl. Phys.* **B576** (2000) 578; C. S. Chu and P. M. Ho, *Nucl. Phys.* **B568** (2000) 447; T.Lee, *Phys. Rev.* **D62** (2000) 024022.

[2] B. Sazdović, Eur. Phys. J. **C44** (2005) 599; B. Nikolić and B. Sazdović, *Phys. Rev.* **D 74** (2006) 045024; B. Nikolić and B. Sazdović, *Phys. Rev.* **D 75** (2007) 085011; B. Nikolić and B. Sazdović, *Adv. Theor. Math. Phys.* **14** (2010) 1, Lj. Davidovic and B. Sazdovic, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014; *JHEP* **08** (2011)112.

[3] T. H. Buscher, *Phys. Lett.* **B194** (1987) 59; T. H. Buscher, *Phys. Lett.* **B201** (1988) 466.

[4] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, *Phys. Lett.* **B 158** (1985) 316; *Nucl. Phys.* **B 261** (1985) 1.

[5] K. Becker, M. Becker and J. Schwarz *String Theory and M-Theory: A Modern Introduction*, Cambridge University Press 2006; B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, Cambridge University Press, 2004.

[6] D. Luest, *JHEP* **12** (2010) 084.

[7] D. Andriot, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, *JHEP* **06** (2013) 021.

[8] D. Andriot, O. Hohm, M. Larfors, D. Luest, P. Patalong, *Phys. Rev. Lett.* 108 (2012) 261602.

[9] D. Luest, arxiv:1205.0100 [hep-th]; R. Blumenhagen, A. Deser, D. Luest, E. Plauschinn, and F. Rennecke, *J.Phys.* **A44** (2011) 385401; C. Condeescu, I. Florakis, and D. Luest, *JHEP* **04** (2012) 121.

[10] Lj. Davidović and B. Sazdović, arXiv:1205.1991 [hep-th].

[11] V. Schomerus, *Class. Quant. Grav.* **19** (2002) 5781; L.Cornalba and R.Schiappa, *Commun. Math. Phys.* **225** (2002) 33.

[12] Lj. Davidović and B. Sazdović, *Phys. Rev.* **D 83** (2011) 066014; *JHEP* **08** (2011) 112; *EPJ* **C 72** No. 11 (2012) 2199.

T-dualization of a weakly curved background

2017 J. Phys.: Conf. Ser. 804 012014

(http://iopscience.iop.org/1742-6596/804/1/012014)

T-dualization of a weakly curved background

Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović

Institute of Physics, University of Belgrade, Belgrade, Serbia

Abstract. We consider a string moving in a weakly curved background, composed of a constant metric and a linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field with an infinitesimal strength. We discuss the T-dualization procedure which we developed for a closed bosonic string moving in a weakly curved background. The procedure is a generalization of a Buscher T-dualization procedure and enables the T-dualization of the nonisometry directions. The same procedure is used to investigate the T-duals of an open bosonic string as well. The generalized T-dualizations give insight to the connection between the geometrical properties of the T-dual spaces.

1. Introduction

In string theory there exists a symmetry, T-duality, which allows the physical equivalence of the string living on the different geometrical structures of the compactified dimensions. The string living in a space with one dimension compactified on a radius R, has the same physical features as a string leaving in a space with one dimension compactified on a radius $\frac{\alpha'}{R}$, where α' is a Regge slope parameter. T-duality was first described in the context of toroidal compactification in [1] (thoroughly explained in [2]), it can be generalized to the arbitrary toroidal compactification [3], and extended to the non-flat conformal backgrounds [4]. The origin of T-duality is seen in a possibility that, unlike a point particle, the string can wrap around compactified dimensions.

The first T-dualization procedure, the prescription for obtaining a theory which is T-dual of a given theory, was defined by Buscher [5]. The procedure was done for a string sigma model, describing a string moving in a background composed of a metric $G_{\mu\nu}$, an antisymmetric field $B_{\mu\nu}$ and a dilaton field Φ. It is required that the metric admits at least one continuous abelian isometry which leaves the action invariant. The procedure is founded in gauging the isometry by introducing the gauge fields v^μ_α. In order to preserve the physical content of the original theory, one requires that the new fields v^μ_α are nonphysical, which is achieved by the requirement that the gauge fields have a vanishing field strength $F^\mu_{\alpha\beta} = \partial_\alpha v^\mu_\beta - \partial_\beta v^\mu_\alpha$. This requirement is included in the theory by adding the Lagrange multiplier term $y_\mu F^\mu_{01}$ into the Lagrangian. Fixing the gauge one obtains the gauge fixed Lagrangian which carries the information on both initial and a T-dual theory. The integration over the Lagrange multipliers y_μ, simply recovers the original theory. The integration over the gauge fields v^μ_α, produces the T-dual theory.

The standard T-dualization procedure is applicable along directions which do not appear as the background field arguments. The generalized T-dualization procedure which is applicable along an arbitrary coordinate was done in Refs. [6, 7, 8]. The procedure is founded in the standard procedure and keeps the main rules of the standard procedure. In order to gauge the global isometry, one introduces the gauge fields v^μ_α, as usual. The replacement of the derivatives $\partial_\alpha x^\mu$ with the covariant ones $D_\alpha x^\mu$, does not as before make the whole action invariant. The

IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series **804** (2017) 012014 doi:10.1088/1742-6596/804/1/012014

obstacle is the background field $B_{\mu\nu}$ depending on x^μ, which is not locally gauge invariant. So, as a new rule we substitute the argument of the background fields by an invariant argument Δx^μ_{inv}, defined as the line integral of the covariant derivatives of the original argument. As before, in order to obtain the theory physically equivalent to the original one, we add the Lagrange multiplier term. Using the local gauge freedom we fix the gauge taking $x^\mu(\xi) = x^\mu(\xi_0)$. The obtained gauge fixed action reduces to to the original action for the equations of motion for the Lagrange multiplier. The T-dual theory is obtained for the equations of motion for the gauge fields v^μ_α.

The generalized T-dualization procedure was investigated for a string moving in a weakly curved background composed of a constant metric, a linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field with an infinitesimal filed strength and a constant dilaton field. It was first applied to all space-time coordinates in Ref. [6], and a T-dual was obtained. In Ref. [8], the procedure was applied to an arbitrary set of the initial coordinates. Choosing d arbitrary directions, we denote $\mathcal{T}^a = \circ^d_{n=1} T^{\mu_n}$, $\mathcal{T}^i = \circ^D_{n=d+1} T^{\mu_n}$, and $\mathcal{T} = \circ^D_{n=1} T^{\mu_n}$, where T^μ stands for a T-dualization along direction x^μ and $\mathcal{T}_a = \circ^d_{n=1} T_{\mu_n}$, $\mathcal{T}_i = \circ^D_{n=d+1} T_{\mu_n}$, $\tilde{\mathcal{T}} = \circ^D_{n=1} T_{\mu_n}$, where T_μ stands for the T-dualization along a dual direction y_μ. Performing the generalized procedure we proved the following composition laws:

$$\mathcal{T}^i \circ \mathcal{T}^a = \mathcal{T}, \quad \mathcal{T}_i \circ \mathcal{T}_a = \tilde{\mathcal{T}}, \quad \mathcal{T}_a \circ \mathcal{T}^a = 1, \tag{1}$$

where 1 denotes the identical transformation (T-dualization not performed). We found the explicit forms of the resulting theories and the corresponding T-dual coordinate transformation laws. These results complete the T-dualization diagram connecting all the theories T-dual to the initial theory.

$$\begin{tikzcd}
 & S[x^i, y_a] \arrow[dl, shift left, "\mathcal{T}_a"] \arrow[dr, shift left, "\mathcal{T}^i"] & \\
S[x^\mu] \arrow[ur, shift left, "\mathcal{T}^a"] \arrow[rr, shift left, "\mathcal{T}"] & & S[y_\mu] \arrow[ul, shift left, "\mathcal{T}_i"] \arrow[ll, shift left, "\tilde{\mathcal{T}}"]
\end{tikzcd}.$$

The initial theory, describing the bosonic string moving in the weakly curved background is defined on the geometrical space. All its T-dual theories are non-geometric and non-local because they depend on variable V^μ, which is a line integral of the derivatives of the dual coordinates. To all of these theories there corresponds a flux which is of the same type as the R flux unlike the non-geometric theories with Q flux, which have a local geometric description.

2. Bosonic string action

Let us consider the action [9, 10] describing the propagation of the bosonic string in a background composed of a space-time metric $G_{\mu\nu}$, a Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$ and a dilaton field Φ

$$S[x] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi \sqrt{-g}\Big[\Big(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} G_{\mu\nu}(x) + \frac{\varepsilon^{\alpha\beta}}{\sqrt{-g}} B_{\mu\nu}(x)\Big)\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + \frac{1}{4\pi\kappa}\Phi(x) R^{(2)}\Big]. \tag{2}$$

The integration goes over two-dimensional world-sheet Σ parametrized by ξ^α ($\xi^0 = \tau,\ \xi^1 = \sigma$), $g_{\alpha\beta}$ is intrinsic world-sheet metric, $R^{(2)}$ corresponding 2-dimensional scalar curvature, $x^\mu(\xi)$, $\mu = 0, 1, ..., D-1$ are the coordinates of the D-dimensional space-time, $\kappa = \frac{1}{2\pi\alpha'}$ and $\varepsilon^{01} = -1$.

In order to have a world-sheet conformal invariance on the quantum level, the background fields have to obey the space-time equations of motion which in the lowest order in slope parameter α', have the following form

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\rho\sigma}B_{\nu}{}^{\rho\sigma} + 2D_\mu\partial_\nu\Phi = 0,$$
$$D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} - 2\partial_\rho\Phi B^\rho{}_{\mu\nu} = 0,$$
$$4(\partial\Phi)^2 - 4D_\mu\partial^\mu\Phi + \frac{1}{12}B_{\mu\nu\rho}B^{\mu\nu\rho} - R + 4\pi\kappa\frac{D-26}{3} = 0\,, \tag{3}$$

where $B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ is the field strength of the field $B_{\mu\nu}$, and $R_{\mu\nu}$ and D_μ are Ricci tensor and covariant derivative with respect to space-time metric. We consider the weakly curved background, defined by

$$G_{\mu\nu} = const, \quad B_{\mu\nu}(x) = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3}B_{\mu\nu\rho}x^\rho \equiv b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad \Phi = const. \tag{4}$$

The Kalb-Ramond field strength $B_{\mu\nu\rho}$ is taken to be infinitesimal. All the calculations are done in the first order in $B_{\mu\nu\rho}$. In this approximation the weakly curved background is the solution of the space-time equations of motion (3).

Introducing the light-cone coordinates

$$\xi^\pm = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma)$$

and their derivatives $\partial_\pm = \partial_\tau \pm \partial_\sigma$, taking a conformal gauge $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$, the action (2) can be written as

$$S[x] = \kappa\int_\Sigma d^2\xi\ \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(x)\partial_- x^\nu, \tag{5}$$

where

$$\Pi_{\pm\mu\nu}(x) = B_{\mu\nu}(x) \pm \frac{1}{2}G_{\mu\nu}(x). \tag{6}$$

3. The Generalized Buscher T-dualization procedure

The standard T-dualization procedure, enables one to find a T-dual of a given theory, applying the procedure to the coordinate directions which do not appear as the background field arguments. The generalized T-dualization procedure does not have this limitation. Both procedures are grounded in a localization of a global coordinate shift symmetry $\delta x^\mu = \lambda^\mu = const$. The first rule of the procedures is the introduction of the gauge fields v^μ_α and the substitution of the ordinary derivatives with the covariant derivatives, defined by

$$\partial_\alpha x^\mu \to D_\alpha x^\mu = \partial_\alpha x^\mu + v^\mu_\alpha. \tag{7}$$

If one imposes the following transformation law for the gauge fields

$$\delta v^\mu_\alpha = -\partial_\alpha\lambda^\mu, \quad (\lambda^\mu = \lambda^\mu(\tau,\sigma)) \tag{8}$$

one obtains $\delta D_\alpha x^\mu = 0$. In the case when the background does not depend on the coordinates, along which the T-dualization is performed, the first step is sufficient to obtain the gauge invariant action. However if the background depends on all the coordinates, an additional rule must be introduced. The new rule reads: *Substitute the background field argument (the* *coordinate x^μ), by the invariant argument (invariant coordinate)*, defined as a line integral of the covariant derivatives of the original coordinate

$$\Delta x^\mu_{inv} \equiv \int_P d\xi^\alpha\, D_\alpha x^\mu = x^\mu - x^\mu(\xi_0) + \Delta V^\mu, \quad \Delta V^\mu \equiv \int_P d\xi^\alpha v^\mu_\alpha. \tag{9}$$

The invariant coordinate is by definition nonlocal. The consequence of this will be a nonlocal T-dual theory, defined on the doubled geometrical space composed of the dual coordinate y_μ and its double $\tilde{y}_\mu$.

The common rule of the procedures is the addition of the Lagrange multiplier term which makes the introduced gauge fields nonphysical, by requiring that there field strength

$$F^\mu_{\alpha\beta} \equiv \partial_\alpha v^\mu_\beta - \partial_\beta v^\mu_\alpha \tag{10}$$

must be zero. This enables the physical equivalence of the theories. Following these rules we built the gauge invariant action.

The main object and the main crossway of the procedure are the gauge fixed action and their equations of motion, because for the equation of motion obtained varying the action over the Lagrange multipliers, one returns to the initial action. On the other hand for the equation of motion obtained varying the gauge fixed action over the gauge fields one obtains the T-dual theory. Comparing the solutions for the gauge fields in these two directions, one obtains the T-dual coordinate transformation laws. These laws are used in investigation of the relations between the non-commutativity characteristics of the spaces connected by T-duality.

The generalized procedure, can be generalized once more in order to allow the T-dualization of the backgrounds which do not have a global symmetry. The generalization was made in Ref. [7] for a bosonic string moving in a weakly curved background of the second order, which consists of the coordinate dependent metric and Kalb-Ramond field. One postulates the auxiliary action which inherits two important features of the gauge fixed action. It reduces to the initial theory for the equations of motion for the Lagrange multipliers and to the T-dual action for the equations of motion for the auxiliary fields.

3.1. Complete T-dualization

If one applies the T-dualization procedure to all coordinates, one obtains a following gauge invariant action

$$S_{inv} = \kappa \int d^2\xi \Big[D_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}(\Delta x_{inv}) D_- x^\nu + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big], \tag{11}$$

which is physically equivalent to the initial action. Fixing the gauge by $x^\mu(\xi) = x^\mu(\xi_0)$, one obtains the gauge fixed action

$$S_{fix}[y, v_\pm] = \kappa \int d^2\xi \Big[v^\mu_+ \Pi_{+\mu\nu}(\Delta V) v^\nu_- + \frac{1}{2}(v^\mu_+ \partial_- y_\mu - v^\mu_- \partial_+ y_\mu) \Big]. \tag{12}$$

In order to find a T-dual action one has to integrate out the gauge fields from (12).

The equations of motion with respect to the gauge fields $v^\mu_\pm$ are

$$\Pi_{\mp\mu\nu}(\Delta V) v^\nu_\pm + \frac{1}{2}\partial_\pm y_\mu = \mp \beta^\mp_\mu(V), \tag{13}$$

with the right hand side coming from the variation of the background fields argument, with $\beta^\pm_\mu(x) = \mp\frac{1}{2} h_{\mu\nu}[x] \partial_\mp x^\nu$. The equation of motion can be rewritten as

$$v^\mu_\pm(y) \;=\; -\kappa\, \Theta^{\mu\nu}_\pm [\Delta V(y)] \Big[\partial_\pm y_\nu \pm 2\beta^\mp_\nu [V(y)] \Big], \tag{14}$$

where

$$\Theta_{\pm}^{\mu\nu}[\Delta V] = -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}\Pi_{\pm}G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu}[\Delta V] \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V], \tag{15}$$

and $G^E_{\mu\nu} \equiv [G - 4BG^{-1}B]_{\mu\nu}$, $\theta^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}BG^{-1})^{\mu\nu}$ are the open string background fields: the effective metric and the non-commutativity parameter respectively. They are defined in analogy with the flat space-time open string background fields introduced in [11]. Tensors $\Pi_{\mp\mu\nu}$ and $\Theta_{\pm}^{\mu\nu}$ are connected by $\Theta_{\pm}^{\mu\nu}\Pi_{\mp\nu\rho} = \frac{1}{2\kappa}\delta^{\mu}_{\rho}$. Substituting (14) into the action (12), we obtain T-dual action

$$^{\star}S[y] \equiv S_{fix}[y] = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\ \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}(y)]\partial_- y_\nu, \tag{16}$$

where we neglected the term $\beta^-_\mu\beta^+_\nu$ as the infinitesimal of the second order, and the argument is given by

$$\Delta V^{(0)\mu}(y) = -\kappa\theta_0^{\mu\nu}\Delta y_\nu^{(0)} + (g^{-1})^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_\nu^{(0)}. \tag{17}$$

Comparing the initial action (5) with the T-dual action (16), we see that they are equal under following transformations $\partial_\pm x^\mu \to \partial_\pm y_\mu$ and $\Pi_{+\mu\nu}[x] \to \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}]$, which implies

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\to\ {}^{\star}G^{\mu\nu} = (G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}], \\ B_{\mu\nu}[x] &\to\ {}^{\star}B^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu}[\Delta V^{(0)}], \end{aligned} \tag{18}$$

where $(G_E^{-1})^{\mu\nu}$ and $\theta^{\mu\nu}$ are introduced in (15).

The initial background consisted of a constant metric and a linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field with an infinitesimal field strength. The T-dual background consists of coordinate dependent metric and Kalb-Ramond field, with the argument ΔV^μ, which is the linear combination of y_μ and its double $\tilde{y}_\mu$. Note that the variable V^μ and consequently T-dual action is not defined on the geometrical space (defined by the coordinate y_μ) but on the so called doubled target space [12] composed of both y_μ and $\tilde{y}_\mu$.

3.2. Partial T-dualization

If one choses only a subset of the initial coordinates, say d coordinates x^a, and performs T-dualization procedure along these coordinates, one obtains the following gauge invariant action

$$\begin{aligned} S_{inv}[x^\mu, x^a_{inv}, y_a] &= \kappa\int d^2\xi\Big[\partial_+ x^i \Pi_{+ij}(x^i, \Delta x^a_{inv})\partial_- x^j \\ &+ \partial_+ x^i \Pi_{+ia}(x^i, \Delta x^a_{inv})D_- x^a + D_+ x^a \Pi_{+ai}(x^i, \Delta x^a_{inv})\partial_- x^i \\ &+ D_+ x^a \Pi_{+ab}(x^i, \Delta x^a_{inv})D_- x^b + \frac{1}{2}(v^a_+ \partial_- y_a - v^a_- \partial_+ y_a)\Big]. \end{aligned} \tag{19}$$

This action is obtained localizing the global shift symmetry only for the coordinates x^a, by introducing the gauge fields v^a_α. The ordinary derivatives $\partial_\alpha x^a$ were substituted by the covariant derivatives $D_\alpha x^a = \partial_\alpha x^a + v^a_\alpha$. The covariant derivatives are invariant under the standard gauge transformations $\delta v^a_\alpha = -\partial_\alpha \lambda^a$. The coordinates x^a in the argument of the background fields were substituted by their invariant extension, defined by $\Delta x^a_{inv} \equiv \int_P d\xi^\alpha D_\alpha x^a = x^a - x^a(\xi_0) + \Delta V^a$, where $\Delta V^a \equiv \int_P d\xi^\alpha v^a_\alpha$. The physical equivalence is preserved by adding the Lagrange multiplier term (the last term in the action). Fixing the gauge by $x^a(\xi) = x^a(\xi_0)$ one obtains the gauge fixed action

$$\begin{aligned} S_{fix}[x^i, v^a_\pm, y_a] &= \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \Pi_{+ij}(x^i, \Delta V^a)\partial_- x^j \\ &+ \partial_+ x^i \Pi_{+ia}(x^i, \Delta V^a) v^a_- + v^a_+ \Pi_{+ai}(x^i, \Delta V^a)\partial_- x^i \\ &+ v^a_+ \Pi_{+ab}(x^i, \Delta V^a) v^b_- + \frac{1}{2}(v^a_+ \partial_- y_a - v^a_- \partial_+ y_a)\Big]. \end{aligned} \tag{20}$$

This action reduces to the initial one for the equations of motion obtained varying over the Lagrange multipliers. The T-dual action is obtained for the equations of motion for the gauge fields. It reads

$$\begin{aligned} S[x^i, y_a] &= \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \overline{\Pi}_{+ij}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\partial_- x^j \\ &-\kappa\, \partial_+ x^i \Pi_{+ia}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\tilde{\Theta}^{ab}_-(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\partial_- y_b \\ &+\kappa\, \partial_+ y_a \tilde{\Theta}^{ab}_-(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\Pi_{+bi}(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\partial_- x^i \\ &+\frac{\kappa}{2}\, \partial_+ y_a \tilde{\Theta}^{ab}_-(x^i, \Delta V^a(x^i, y_a))\partial_- y_b\Big]. \end{aligned} \tag{21}$$

The T-dual background fields compositions are the inverses of the already known background compositions, divided into two coordinate subspaces, the subspace formed by the coordinates we T-dualize and the subspace formed by the rest of the coordinates. The background field compositions $\overline{\Pi}_{\pm ij}$ and $\tilde{\Theta}^{ab}_\pm$ are defined as the inverses of the background field compositions $\Theta^{jk}_\mp$ and $\Pi_{\mp bc}$, which are the parts of $\Theta^{\mu\nu}_\mp$ and $\Pi_{\mp\mu\nu}$ in an appropriate subspace

$$\begin{aligned} \overline{\Pi}_{\pm ij}\Theta^{jk}_\mp = \Theta^{kj}_\mp \overline{\Pi}_{\pm ji} = \frac{1}{2\kappa}\delta^k_i, \\ \tilde{\Theta}^{ab}_\pm \Pi_{\mp bc} = \Pi_{\mp cb}\tilde{\Theta}^{ba}_\pm = \frac{1}{2\kappa}\delta^a_c. \end{aligned} \tag{22}$$

It can be shown that

$$\overline{\Pi}_{+ij} \equiv \Pi_{+ij} - 2\kappa \Pi_{+ia}\tilde{\Theta}^{ab}_-\Pi_{+bj}. \tag{23}$$

The argument of the background fields is

$$\begin{aligned} \Delta V^{(0)a}(x^i, y_a) &= -\kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta x^{(0)i} \\ &- \kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta \tilde{x}^{(0)i} \\ &- \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta y^{(0)}_b - \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta \tilde{y}^{(0)}_b. \end{aligned} \tag{24}$$

Calculating the symmetric and antisymmetric part of the background fields we obtain a T-dual metric and a T-dual Kalb-Ramond field

$$\begin{aligned} &\bullet G_{ij} = \overline{G}_{ij} = G_{ij} - G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -2\kappa\Big(B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} + G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj}\Big) - 4B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj}, \\ &\bullet B_{ij} = \overline{B}_{ij} = B_{ij} - \frac{\kappa}{2}G_{ia}\tilde{\theta}^{ab}G_{bj} - B_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bj} \\ &\quad -G_{ia}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bj} - 2\kappa B_{ia}\tilde{\theta}^{ab}B_{bj}, \\ &\bullet G^{ab} = (\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}, \\ &\bullet B^{ab} = \frac{\kappa}{2}\tilde{\theta}^{ab}, \\ &\bullet G^a{}_i = \kappa\tilde{\theta}^{ab}G_{bi} + 2(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}B_{bi}, \\ &\bullet B^a{}_i = \kappa\tilde{\theta}^{ab}B_{bi} + \frac{1}{2}(\tilde{G}^{-1}_E)^{ab}G_{bi}. \end{aligned} \tag{25}$$

As the constituents of the T-dual background field there appear the effective metric in the subspace a, defined by $\tilde{G}_{Eab} \equiv G_{ab} - 4B_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd}B_{db}$, the non-commutativity parameter in the same subspace $\tilde{\theta}^{ab} \equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ac}B_{cd}(\tilde{G}^{-1})^{db}$, which combined give the new theta function $\tilde{\Theta}_{\pm}^{ab} = \tilde{\theta}^{ab} \mp \frac{1}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ab}$.

4. Open string T-dualization

In paper [13] we investigated a T-duality of an open string moving in a weakly curved background. The open string moving in a weakly curved background was a subject of investigation in our papers [14, 15, 16]. Solving the boundary conditions at the open string end-points, one obtains the effective closed string described by the effective closed string theory S^{eff}, defined on the doubled space $(q^\mu, \tilde{q}^\mu)$. As the effective theory is closed string theory, one can try to apply the generalized T-dualization procedure to this theory. The effective theory is defined on the doubled theory, just as the T-duals of the closed string theory moving in the weakly curved background. So, the application in this case resembles the application of the T-dualization procedure to the T-dual theories.

The effective theory of the open string moving in the weakly curved background, obtained for the solution of the boundary conditions equals

$$S^{eff} = \kappa \int d\tau \int_{-\pi}^{\pi} d\sigma\, \partial_+ q^\mu\, \Pi^{eff}_{+\mu\nu}(q, 2b\tilde{q})\, \partial_- q^\nu, \tag{26}$$

where

$$\Pi^{eff}_{\pm\mu\nu}(q, 2b\tilde{q}) \equiv B^{eff}_{\mu\nu}(2b\tilde{q}) \pm \frac{1}{2} G^{eff}_{\mu\nu}(q). \tag{27}$$

The effective variable is $q^\mu(\sigma)$, an even part of the initial coordinate. The effective metric and the Kalb-Ramond field are explicitly given by

$$\begin{aligned} G^{eff}_{\mu\nu}(q) &= G^E_{\mu\nu}(q) := (G - 4B^2(q))_{\mu\nu}, \\ B^{eff}_{\mu\nu}(2b\tilde{q}) &= -\frac{\kappa}{2}\Big(g_E \Delta\theta(2b\tilde{q}) g_E\Big)_{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{28}$$

where $\Delta\theta^{\mu\nu}$ is the infinitesimal part of the non-commutativity parameter $\theta^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}\Big[G_E^{-1}BG^{-1}\Big]^{\mu\nu} = \theta_0^{\mu\nu} - \frac{2}{\kappa}\Big[g_E^{-1}(h + 4bhb)g_E^{-1}\Big]^{\mu\nu}$. In paper [13] we applied the generalized Buscher T-dualization procedure, to the effective theory along all effective directions q^μ. Following the procedure we find the gauge fixed action

$$\mathcal{S}_{fix} = \kappa \int d^2\xi \Big[v_+^\mu \Pi^{eff}_{+\mu\nu}(\Delta V, 2b\Delta\tilde{V}) v_-^\nu + \frac{1}{2}(v_+^\mu \partial_- \varrho_\mu - v_-^\mu \partial_+ \varrho_\mu)\Big], \tag{29}$$

obtained from the effective action (26), by substituting the light-cone derivatives $\partial_\pm q^\mu$ with the covariant derivatives $D_\pm q^\mu = \partial_\pm q^\mu + v_\pm^\mu$, where $v_\pm^\mu$ are the gauge fields, which transform as $\delta v_\pm^\mu = -\partial_\pm \lambda^\mu$. The argument of the background fields is substituted with an invariant argument, which is obtained substituting the effective coordinate q^μ and its double $\tilde{q}^\mu$ with an invariant effective coordinate and its double, defined by the following line integrals of the gauge fields $\Delta V^\mu = \int_P (d\xi^+ v_+^\mu + d\xi^- v_-^\mu)$, and $\Delta\tilde{V}^\mu = \int_P (d\xi^+ v_+^\mu - d\xi^- v_-^\mu)$. The physical equivalence was achieved by adding the Lagrange multiplier term $\frac{1}{2}(v_+^\mu \partial_- \varrho_\mu - v_-^\mu \partial_+ \varrho_\mu)$ and the gauge is fixed with $q^\mu(\xi) = q^\mu(\xi_0)$.

The T-dual theory was obtained for the equation of motion for the gauge fields. The T-dual action reads

$$^\star\mathcal{S} = \kappa \int d^2\xi \partial_+ \varrho_\mu \frac{\kappa}{2} (\Theta_-^{eff})^{\mu\nu} (\Delta V(\varrho), 2b\Delta\tilde{V}(\varrho)) \partial_- \varrho_\nu, \tag{30}$$

where

$$(\Theta_{\pm}^{eff})^{\mu\nu}(x,y) \equiv \Theta_{\pm}^{\mu\nu}(G_{eff}(x), B_{eff}(y)) = \theta_{eff}^{\mu\nu}(y) \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}(x), \tag{31}$$

$\theta_{eff}^{\mu\nu} := \theta^{\mu\nu}(G_{eff}(x), B_{eff}(y)) = -\frac{2}{\kappa}\Big(G_E^{-1}(G_{eff}(x), B_{eff}(y))B_{eff}(y)G_{eff}^{-1}(x)\Big)^{\mu\nu}$ and the argument is

$$\begin{aligned} V_0^\mu(\varrho) &= (g_E^{-1})^{\mu\nu}(G^{eff}, B^{eff})\tilde{\varrho}_\nu = (g_E^{-1})^{\mu\nu}\tilde{\varrho}_\nu, \\ \tilde{V}_0^\mu(\varrho) &= (g_E^{-1})^{\mu\nu}(G^{eff}, B^{eff})\varrho_\nu = (g_E^{-1})^{\mu\nu}\varrho_\nu. \end{aligned} \tag{32}$$

The T-dual metric ${}^\star G^{\mu\nu}$ which depends on the first variable ΔV^μ and the T-dual Kalb-Ramond field ${}^\star B^{\mu\nu}$, which depends on the second variable $2b^\mu{}_\nu \Delta\tilde{V}^\nu$ are

$$\begin{aligned} {}^\star G^{\mu\nu} &= (G_E^{-1})^{\mu\nu}(\Delta V), \\ {}^\star B^{\mu\nu} &= \frac{\kappa}{2}(\theta^{eff})^{\mu\nu}(2b\Delta\tilde{V}) = \frac{\kappa}{2}\Delta\theta^{\mu\nu}(2b\Delta\tilde{V}). \end{aligned} \tag{33}$$

We see, that the effective metric has transformed to its inverse and that the Kalb-Ramond field has transformed to the infinitesimal part of the non-commutativity parameter.

Finally, we searched for the open string theory $\tilde{S}$ such that its effective theory is ${}^\star S^{eff}$ exactly. We found

$$\widetilde{S}[y] = \kappa \int_\Sigma d^2\xi\ \partial_+ y_\mu \widetilde{\Pi}_+^{\mu\nu}(y)\partial_- y_\nu, \tag{34}$$

with

$$\begin{aligned} \widetilde{G} &= -(C^T)^{-1}GC^{-1}, \\ \widetilde{B}(y) &= \pm(C^T)^{-1}(b - h(C^{-1}y))C^{-1}, \end{aligned} \tag{35}$$

where C makes a connection between the variables of the effective theory of $\tilde{S}$ and the T-dual theory (30)

$$\begin{aligned} q_\mu(y) &= C_{\mu\nu}(g_E^{-1})^{\nu\rho}\tilde{\varrho}_\rho\,, \\ \bar{q}_\mu(y) &= \mp C_{\mu\nu}2(G^{-1}bg_E^{-1})^{\nu\rho}\varrho_\rho. \end{aligned} \tag{36}$$

In the closed string moving in the weakly curved background case, the T-duality transforms the geometrical background into a doubled non-geometrical background. It transforms a constant metric to a coordinate dependent effective metric inverse, while the linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field is transformed into a coordinate dependent non-commutativity parameter. In the open string case, the T-dual theory remains geometric. T-duality transforms the constant metric of the weakly curved background to a constant T-dual metric, while the coordinate dependent Kalb-Ramond field transforms again to the coordinate dependent field.

In paper [17] a generalization of the standard analysis of the open bosonic string moving in a flat background is addressed. The T-dualization was performed in two ways, first in terms of non-constant vector fields in which case the Buscher T-dualization procedure can not be applied and second in terms of the field strengths of the gauge fields. The role of the gauge fields, which live on the string boundary, is to restore the symmetries of the closed string: the local gauge symmetry of the Kalb-Ramond field and the general coordinate transformations, at the string end-points. The investigation lead to a discovery of the geometrical features of the non-geometry.

Conclusion

The generalized T-dualization procedure, enabled T-dualization over the non isometry directions. It gives the new insights into a connection between the spaces connected by T-duality. It enabled further investigations of the closed string non-commutativity [18]. Comparing the solutions for the gauge fields which transform the gauge fixed actions into the initial or the T-dual actions, one obtains the T-dual coordinate transformation laws. Using these laws one can find how does for example a standard Poisson bracket transform. It is obtained that the original theory which is commutative is equivalent to the non-commutative T-dual theory, whose Poisson brackets are proportional to the background fluxes times winding and momentum numbers. The obtained results add novelty to the form and the origin of different non-commutative structures.

Acknowledgments

Research is supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development (project No. 171031) and by The National Scholarship L'Oreal-UNESCO "For Women in Science" which Lj.D. obtained in 2015.

References

[1] L.Brink, M.B. Green, J.H. Schwarz, *Nucl. Phys.* **B 198** (1982) 474; K. Kikkawa and M.Yamasaki, *Phys. Lett.* **B 149** (1984) 357; N. Sakai and I. Senda, *Prog. Theor. Phys.* **75** (1984) 692.
[2] E. Alvarez, L. Alvarez-Gaume and Y. Lozano, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **41** (1995) 1; A. Giveon, M.Parrati and E. Rabinovici, *Phys. Rep.* **244** (1994) 77.
[3] K.Narain, H. Sarmadi and E. Witten, *Nucl. Phys.* **B 279** (1987) 369.
[4] T. Buscher, *Phys. Lett.* **B 194** (1987) 51; **201** (1988) 466.
[5] T. Buscher, Phys. Lett. **B 194** (1987) 59; M. Roček and E.P. Verlinde, Nucl. Phys. **B 373** (1992) 630.
[6] Lj. Davidović and B. Sazdović, EPJ**C 74** No. 1 (2014) 2683.
[7] Lj. Davidović and B. Sazdović, EPJ**C 75** No. 12 (2015) 576.
[8] Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, JHEP **11** (2015) 119.
[9] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*, (Cambridge University Press, 2004).
[10] K. Backer, M. Backer and J. Schwarz, *String Theory and M-theory*, (Cambridge University Press, 2007).
[11] N. Seiberg, E. Witten, J. High Energy Phys. **09** (1999) 032.
[12] C. Hull, *JHEP* **10** (2005) 065; A. Dabholkar and C. Hull, *JHEP* **05** (2006) 009; C. Hull, *JHEP* **07** (2007) 080; J. Shelton, W. Taylor and B. Wecht, *JHEP* **10** (2005) 085; A. Dabholkar and C. Hull, *JHEP* **09** (2003) 054; A. Flournoy and B. Williams, *JHEP* **01** (2006) 166; T. Kugo, B. Zwiebach, *Prog. Theor. Phys.* **87** (1992) 801; O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, *JHEP* **08** (2010) 008; O. Hohm, C. Hull and B. Zwiebach, *JHEP* **07** (2010) 016; B. Wecht, *Class.Quant.Grav.* **24 21** (2007) S773; D. Lust, *JHEP* **12** (2010) 084; D.Mylonas, P. Schupp and R. Szabo, arXiv:1207.0926 [hep-th].
[13] Lj. Davidović, EPJ**C 76** (2016) 660.
[14] Lj. Davidović and B. Sazdović, Phys. Rev. **D 83** (2011) 066014.
[15] Lj. Davidović and B. Sazdović, JHEP **08** (2011) 112.
[16] Lj. Davidović and B. Sazdović, EPJ**C 72** No. 11 (2012) 2199.
[17] B. Sazdović, arXiv:1606.01938 [hep-th].
[18] Lj. Davidović, B. Nikolić and B. Sazdović, EPJ**C 74** (2014) 2734.

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics

Vladimir Dobrev *Editor*

Lie Theory and Its Applications in Physics

Varna, Bulgaria, June 2013

Springer

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics

Volume 111

More information about this series at http://www.springer.com/series/10533

Springer Proceedings in Mathematics & Statistics

This book series features volumes composed of select contributions from workshops and conferences in all areas of current research in mathematics and statistics, including operation research and optimization. In addition to an overall evaluation of the interest, scientific quality, and timeliness of each proposal at the hands of the publisher, individual contributions are all refereed to the high quality standards of leading journals in the field. Thus, this series provides the research community with well-edited, authoritative reports on developments in the most exciting areas of mathematical and statistical research today.

Vladimir Dobrev
Editor

Lie Theory and Its Applications in Physics

Varna, Bulgaria, June 2013

Springer

Editor
Vladimir Dobrev
Institute for Nuclear Research
and Nuclear Energy
Bulgarian Academy of Sciences
72 Tsarigradsko Chaussee
Sofia, Bulgaria

ISSN 2194-1009 ISSN 2194-1017 (electronic)
ISBN 978-4-431-55284-0 ISBN 978-4-431-55285-7 (eBook)
DOI 10.1007/978-4-431-55285-7
Springer Tokyo Heidelberg New York Dordrecht London

Library of Congress Control Number: 2014958024

Printed on acid-free paper

Springer is part of Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Preface

The Workshop series 'Lie Theory and Its Applications in Physics' is designed to serve the community of theoretical physicists, mathematical physicists and mathematicians working on mathematical models for physical systems based on geometrical methods and in the field of Lie theory.

The series reflects the trend towards a geometrisation of the mathematical description of physical systems and objects. A geometric approach to a system yields in general some notion of symmetry which is very helpful in understanding its structure. Geometrisation and symmetries are meant in their widest sense, i.e., representation theory, algebraic geometry, infinite-dimensional Lie algebras and groups, superalgebras and supergroups, groups and quantum groups, noncommutative geometry, symmetries of linear and nonlinear PDE, special functions. Furthermore we include the necessary tools from functional analysis and number theory. This is a big interdisciplinary and interrelated field.

The first three workshops were organised in Clausthal (1995, 1997, 1999), the 4th was part of the 2nd Symposium 'Quantum Theory and Symmetries' in Cracow (2001), the 5th, 7th, 8th and 9th were organised in Varna (2003, 2007, 2009, 2011), the 6th was part of the 4th Symposium 'Quantum Theory and Symmetries' in Varna (2005), but has its own volume of Proceedings.

The 10th Workshop of the series (LT-10) was organized by the Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy of the Bulgarian Academy of Sciences (BAS) in June 2013 (17–23), at the Guest House of BAS near Varna on the Bulgarian Black Sea Coast.

The overall number of participants was 71 and they came from 21 countries.

The scientific level was very high as can be judged by the speakers. The *plenary speakers* were: Loriano Bonora (Trieste), Branko Dragovich (Belgrade), Ludvig Faddeev (St. Petersburg), Malte Henkel (Nancy), Evgeny Ivanov (Dubna), Toshiyuki Kobayashi (Tokyo), Ivan Kostov (Saclay), Karl-Hermann Neeb (Erlangen), Eric Ragoucy (Annecy), Ivan Todorov (Sofia), Joris Van Der Jeugt (Ghent), George Zoupanos (Athens).

The topics covered the most modern trends in the field of the Workshop: Symmetries in String Theories and Gravity Theories, Conformal Field Theory, Integrable Systems, Representation Theory, Supersymmetry, Quantum Groups, Vertex Algebras and Superalgebras, Quantum Computing.

There is some similarity with the topics of preceding workshops, however, the comparison shows how certain topics evolve and that new structures were found and used. For the present workshop we mention more emphasis on: representation theory, quantum groups, integrable systems, vertex algebras and superalgebras, on conformal field theories, applications to the minimal supersymmetric standard model.

The International Organizing Committee was: V.K. Dobrev (Sofia) and H.-D. Doebner (Clausthal) in collaboration with G. Rudolph (Leipzig).

The Local Organizing Committee was: V.K. Dobrev (Chairman), V.I. Doseva, A.Ch. Ganchev, S.G. Mihov, D.T. Nedanovski, T.V. Popov, T.P. Stefanova, M.N. Stoilov, N.I. Stoilova, S.T. Stoimenov.

Acknowledgments

We express our gratitude to the

- Institute of Nuclear Research and Nuclear Energy
- Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics

for financial help. We thank the Bulgarian Academy of Sciences for providing its Guest House which contributed very much to the stimulating and pleasant atmosphere during the Workshop. We thank the Publisher, Springer Japan, represented by Ms. Chino Hasebe (Executive Editor in Mathematics, Statistics, Business, Economics, Computer Science) and Mr. Masayuki Nakamura (Editorial Department), for assistance in the publication. Last, but not least, I thank the members of the Local Organizing Committee who, through their efforts, made the workshop run smoothly and efficiently.

Sofia, Bulgaria — Vladimir Dobrev
May 2014

Complete T-Dualization of a String in a Weakly Curved Background

Lj. Davidović, B. Nikolić, and B. Sazdović

Abstract We apply the generalized Buscher procedure, to a subset of the initial coordinates of the bosonic string moving in the weakly curved background, composed of a constant metric and a linearly coordinate dependent Kalb-Ramond field with the infinitesimal strength. In this way we obtain the partially T-dualized action. Applying the procedure to the rest of the original coordinates we obtain the totally T-dualized action. This derivation allows the investigation of the relations between the Poisson structures of the original, the partially T-dualized and the totally T-dualized theory.

1 Bosonic String in the Weakly Curved Background

Let us consider the closed string moving in the coordinate dependent background, described by the action [1]

$$S[x] = \kappa \int_{\Sigma} d^2\xi \; \partial_+ x^\mu \Pi_{+\mu\nu}[x] \partial_- x^\nu . \tag{1}$$

The background is defined by the space-time metric $G_{\mu\nu}$ and the antisymmetric Kalb-Ramond field $B_{\mu\nu}$

$$\Pi_{\pm\mu\nu}[x] = B_{\mu\nu}[x] \pm \frac{1}{2} G_{\mu\nu}[x]. \tag{2}$$

The light-cone coordinates are

$$\xi^{\pm} = \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \qquad \partial_{\pm} = \partial_\tau \pm \partial_\sigma , \tag{3}$$

and the action is given in the conformal gauge (the world-sheet metric is taken to be $g_{\alpha\beta} = e^{2F}\eta_{\alpha\beta}$).

Lj. Davidović (✉) • B. Nikolić • B. Sazdović
Institute of Physics, Pregrevica 118, 11080 Belgrade, Serbia
e-mail: ljubica@ipb.ac.rs; bnikolic@ipb.ac.rs; sazdovic@ipb.ac.rs

V. Dobrev (ed.), *Lie Theory and Its Applications in Physics*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 111, DOI 10.1007/978-4-431-55285-7_2

The world-sheet conformal invariance is required, as a condition of having a consistent theory on a quantum level. This leads to the space-time equations for the background fields, which equal

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\rho\sigma} B_{\nu}{}^{\rho\sigma} = 0, \quad D_\rho B^\rho{}_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

in the lowest order in slope parameter α' and for the constant dilaton field $\Phi = const$. Here $B_{\mu\nu\rho} = \partial_\mu B_{\nu\rho} + \partial_\nu B_{\rho\mu} + \partial_\rho B_{\mu\nu}$ is the field strength of the field $B_{\mu\nu}$, and $R_{\mu\nu}$ and D_μ are Ricci tensor and covariant derivative with respect to the space-time metric.

We will consider a weakly curved background [2, 3], defined by

$$\begin{aligned} &G_{\mu\nu}[x] = const, \\ &B_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x] = b_{\mu\nu} + \frac{1}{3} B_{\mu\nu\rho} x^\rho, \qquad b_{\mu\nu}, B_{\mu\nu\rho} = const. \end{aligned} \tag{5}$$

Here, the constant $B_{\mu\nu\rho}$ is infinitesimal. The background (5) is the solution of the field equations (4) in the first order in $B_{\mu\nu\rho}$.

2 Partial T-Dualization

In the paper [3], we generalized the Buscher prescription for a construction of a T-dual theory. This prescription, unlike the standard one [4], is applicable to the string backgrounds depending on all the space-time coordinates, such as the weakly curved background. We performed the procedure along all the coordinates and obtained T-dual theory. The noncommutativity of the T-dual coordinates we investigated in [5]. In the present paper we consider the partial T-dualization, i.e. the application of the procedure to some without subset of the coordinates. We construct the partially T-dualized theory. The noncommutativity of the coordinates in similar theories was considered in [6].

Let us mark the T-dualization along the coordinate x^μ by T_μ, and separate the coordinates into two subsets (x^i, x^a) with $i = 0, \ldots, d-1$ and $a = d, \ldots, D-1$ and mark the T-dualizations along these subsets of coordinates by

$$T^i \equiv T_0 \circ \cdots \circ T_{d-1}, \quad T^a \equiv T_d \circ \cdots \circ T_{D-1}. \tag{6}$$

In this section we will find the partially T-dualized action performing T-dualization along coordinates x^a, $\mathcal{T}^a : S$.

The closed string action in the weakly curved background has a global symmetry

$$\delta x^\mu = \lambda^\mu . \tag{7}$$

Let us localize this symmetry for the coordinates x^a

$$\delta x^a = \lambda^a(\tau,\sigma), \quad a = d,\dots,D-1, \tag{8}$$

by introducing the gauge fields v_α^a and substituting the ordinary derivatives with the covariant ones

$$\partial_\alpha x^a \to D_\alpha x^a = \partial_\alpha x^a + v_\alpha^a . \tag{9}$$

The gauge invariance of the covariant derivatives is obtained by imposing the following transformation law for the gauge fields

$$\delta v_\alpha^a = -\partial_\alpha \lambda^a . \tag{10}$$

Also, substitute x^a in the argument of the background fields with its invariant extension, defined by

$$\begin{aligned} \Delta x_{inv}^a &\equiv \int_P d\xi^\alpha\, D_\alpha x^a = \int_P (d\xi^+ D_+ x^a + d\xi^- D_- x^a) \\ &= x^a - x^a(\xi_0) + \Delta V^a , \end{aligned} \tag{11}$$

where

$$\Delta V^a \equiv \int_P d\xi^\alpha v_\alpha^a = \int_P (d\xi^+ v_+^a + d\xi^- v_-^a). \tag{12}$$

The line integral is taken along the path P, from the initial point $\xi_0^\alpha(\tau_0,\sigma_0)$ to the final one $\xi^\alpha(\tau,\sigma)$. To preserve the physical equivalence between the gauged and the original theory, one introduces the Lagrange multiplier y_a and adds the term $\frac{1}{2} y_a F_{+-}^a$ to the Lagrangian, which will force the field strength $F_{+-}^a \equiv \partial_+ v_-^a - \partial_- v_+^a = -2F_{01}^a$ to vanish. In this way, we obtain the gauge invariant action

$$\begin{aligned} S_{inv} = \kappa \int d^2\xi \Big[&\partial_+ x^i \Pi_{+ij}[x^i, \Delta x_{inv}^a] \partial_- x^j + \partial_+ x^i \Pi_{+ia}[x^i, \Delta x_{inv}^a] D_- x^a \\ &+ D_+ x^a \Pi_{+ai}[x^i, \Delta x_{inv}^a] \partial_- x^i + D_+ x^a \Pi_{+ab}[x^i, \Delta x_{inv}^a] D_- x^b \\ &+ \frac{1}{2}(v_+^a \partial_- y_a - v_-^a \partial_+ y_a) \Big], \end{aligned} \tag{13}$$

where the last term is equal to $\frac{1}{2} y_a F_{+-}^a$ up to the total divergence. Now, we can use the gauge freedom to fix the gauge $x^a(\xi) = x^a(\xi_0)$. The gauge fixed action equals

$$S_{fix} = \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \Pi_{+ij}[x^i, \Delta V^a] \partial_- x^j + \partial_+ x^i \Pi_{+ia}[x^i, \Delta V^a] v_-^a \\ + v_+^a \Pi_{+ai}[x^i, \Delta V^a] \partial_- x^i + v_+^a \Pi_{+ab}[x^i, \Delta V^a] v_-^b \\ + \frac{1}{2}(v_+^a \partial_- y_a - v_-^a \partial_+ y_a) \Big]. \tag{14}$$

The equations of motion for the Lagrange multiplier y_a, $\partial_+ v_-^a - \partial_- v_+^a = 0$, have a solution $v_\pm^a = \partial_\pm x^a$, which turns the gauge fixed action to the initial one.

2.1 The Partially T-Dualized Action

The partially T-dualized action will be obtained after elimination of the gauge fields from the gauge fixed action (14), using their equations of motion. Varying over the gauge fields $v_\pm^a$ one obtains

$$\Pi_{\pm ai}[x^i, \Delta V^a] \partial_\mp x^i + \Pi_{\pm ab}[x^i, \Delta V^a] v_\mp^b + \frac{1}{2} \partial_\mp y_a = \pm \beta_a^\pm [x^i, V^a], \tag{15}$$

where $\beta_a^\pm[x^i, V^a]$ is the infinitesimal contribution from the background fields argument. Using the inverse of the background fields composition $2\kappa \Pi_{\pm ab}$, defined by $\tilde{\Theta}_\pm^{ab} \equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{G}_E^{-1})^{ac} \Pi_{\pm cd} (\tilde{G}^{-1})^{db}$, where $\tilde{G}_{ab} \equiv G_{ab}$ and $\tilde{G}_{Eab} \equiv G_{ab} - 4B_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd} B_{db}$, we can extract the gauge fields $v_\pm^a$ from Eq. (15)

$$v_\mp^a = -2\kappa \tilde{\Theta}_\mp^{ab}[x^i, \Delta V^a] \Big[\Pi_{\pm bi}[x^i, \Delta V^a] \partial_\mp x^i + \frac{1}{2} \partial_\mp y_b \mp \beta_b^\pm [x^i, V^a] \Big]. \tag{16}$$

Substituting (16) into the action (14), we obtain the partially T-dualized action

$$S_\pi[x^i, y_a] = \kappa \int d^2\xi \Big[\partial_+ x^i \bar{\Pi}_{+ij}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \partial_- x^j \\ + \frac{\kappa}{2} \partial_+ y_a \tilde{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \partial_- y_b \\ -\kappa\, \partial_+ x^i \Pi_{+ia}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \tilde{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \partial_- y_b \\ +\kappa\, \partial_+ y_a \tilde{\Theta}_-^{ab}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \Pi_{+bi}[x^i, \Delta V^a(x^i, y^a)] \partial_- x^i \Big], \tag{17}$$

where

$$\bar{\Pi}_{+ij} \equiv \Pi_{+ij} - 2\kappa \Pi_{+ia} \tilde{\Theta}_-^{ab} \Pi_{+bj}. \tag{18}$$

In order to find the explicit value of the background fields argument $\Delta V^a(x^i, y^a)$, one substitutes the zeroth order of the equations of motion (16) into (12) and obtains

$$\begin{aligned}\Delta V^{(0)a} &= -\kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta x^{(0)i}\\ &\quad -\kappa\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+}\Pi_{0-bi} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Pi_{0+bi}\Big]\Delta \tilde{x}^{(0)i}\\ &\quad -\frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} + \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta y^{(0)}_b - \frac{\kappa}{2}\Big[\tilde{\Theta}^{ab}_{0+} - \tilde{\Theta}^{ab}_{0-}\Big]\Delta \tilde{y}^{(0)}_b,\end{aligned} \tag{19}$$

where $\tilde{\Theta}^{ab}_{0\pm}$ stands for the zeroth order value of $\tilde{\Theta}^{ab}_{\pm}$, which can be written as

$$\tilde{\Theta}^{ab}_{0\pm} \equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ac}\,\Pi_{0\pm cd}(\tilde{G}^{-1})^{db} = \tilde{\theta}^{ab}_0 \mp \frac{1}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ab}, \tag{20}$$

where $\tilde{g}_{ab} = G_{ab} - 4b_{ac}(\tilde{G}^{-1})^{cd}b_{db}$; $\tilde{\theta}^{ab}_0 \equiv -\frac{2}{\kappa}(\tilde{g}^{-1})^{ac}\,b_{cd}(\tilde{G}^{-1})^{db}$ and

$$\Delta\tilde{y}^{(0)}_a = \int(d\tau y^{(0)\prime}_a + d\sigma\dot{y}^{(0)}_a), \quad \Delta\tilde{x}^{(0)i} = \int(d\tau x^{(0)\prime i} + d\sigma\dot{x}^{(0)i}). \tag{21}$$

Initial theory, the partially T-dualized theory and the totally T-dualized theory obtained in [3] are physically equivalent theories. In the next section we will partially T-dualize the partially T-dualized theory.

3 The Total T-Dualization of the Initial Action

The T-dual theory, derived in [3], a result of T-dualization of the initial action along all the coordinates, is given by

$${}^\star S[y] = \kappa\int d^2\xi\,\partial_+ y_\mu\,{}^\star\Pi^{\mu\nu}_+[\Delta V(y)]\,\partial_- y_\nu = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\,\partial_+ y_\mu\Theta^{\mu\nu}_-[\Delta V(y)]\partial_- y_\nu, \tag{22}$$

with

$$\Theta^{\mu\nu}_\pm \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}\Pi_\pm G^{-1})^{\mu\nu} = \theta^{\mu\nu} \mp \frac{1}{\kappa}(G_E^{-1})^{\mu\nu}, \tag{23}$$

where

$$G_{E\mu\nu} \equiv G_{\mu\nu} - 4(BG^{-1}B)_{\mu\nu}, \quad \theta^{\mu\nu} \equiv -\frac{2}{\kappa}(G_E^{-1}BG^{-1})^{\mu\nu}. \tag{24}$$

The T-dual background fields are equal to

$$^\star G^{\mu\nu}[\Delta V(y)] = (G_E^{-1})^{\mu\nu}[\Delta V(y)], \quad ^\star B^{\mu\nu}[\Delta V(y)] = \frac{\kappa}{2}\theta^{\mu\nu}[\Delta V(y)]. \tag{25}$$

The argument of the background fields is given by

$$\Delta V^\mu(y) = -\kappa\theta_0^{\mu\nu}\Delta y_\nu + (g^{-1})^{\mu\nu}\Delta\tilde{y}_\nu, \tag{26}$$

where $\Delta y_\mu = y_\mu(\xi) - y_\mu(\xi_0)$ and $\tilde{y}_\mu = \int(d\tau y'_\mu + d\sigma\dot{y}_\mu)$, while $g_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} - 4b^2_{\mu\nu}$ and $\theta_0^{\mu\nu} = -\frac{2}{\kappa}(g^{-1}bG^{-1})^{\mu\nu}$.

Let us now show that the same result will be obtained applying the T-dualization procedure to the coordinates x^i of the partially T-dualized theory (17), $\mathcal{T}^i : S_\pi[x^i, y_a]$. Substituting the ordinary derivatives $\partial_\pm x^i$ with the covariant derivatives

$$D_\pm x^i = \partial_\pm x^i + v^i_\pm, \tag{27}$$

where the gauge fields $v^i_\pm$ transform as $\delta v^i_\pm = -\partial_\pm\lambda^i$, and substituting the coordinates x^i in the background field arguments by

$$\Delta x^i_{inv} = \int_P (d\xi^+ D_+ x^i + d\xi^- D_- x^i), \tag{28}$$

we obtain the gauge invariant action, which after fixing the gauge by $x^i(\xi) = x^i(\xi_0)$ becomes

$$\begin{aligned} S_\pi^{fix} = \kappa\int d^2\xi\Big[& v^i_+\bar{\Pi}_{+ij}[\Delta V^\mu]v^j_- + \frac{\kappa}{2}\partial_+ y_a\tilde{\Theta}^{ab}_-[\Delta V^\mu]\partial_- y_b \\ & -\kappa\, v^i_+\Pi_{+ia}[\Delta V^\mu]\tilde{\Theta}^{ab}_-[\Delta V^\mu]\partial_- y_b + \kappa\,\partial_+ y_a\tilde{\Theta}^{ab}_-[\Delta V^\mu]\Pi_{+bi}[\Delta V^\mu]v^i_- \\ & +\frac{1}{2}(v^i_+\partial_- y_i - v^i_-\partial_+ y_i)\Big]. \end{aligned} \tag{29}$$

Here ΔV^i is defined by

$$\Delta V^i \equiv \int_P (d\xi^+ v^i_+ + d\xi^- v^i_-), \tag{30}$$

and ΔV^a is defined in (19), whose arguments are in this case ΔV^i and y^a.

The totally T-dualized action will be obtained by eliminating the gauge fields from the gauge fixed action, using their equations of motion. Varying the action (29) over the gauge fields $v^i_\pm$ one obtains

$$\bar{\Pi}_{\pm ij}v^j_\mp - \kappa\Pi_{\pm ia}\tilde{\Theta}^{ab}_\mp\partial_\mp y_b + \frac{1}{2}\partial_\mp y_i = \pm\beta^\pm_i. \tag{31}$$

Using the fact that the background field composition $\bar{\Pi}_{\pm ij}$ is inverse to $2\kappa\Theta_{\mp}^{ij}$, we can rewrite the equation of motion (31) expressing the gauge fields as

$$v_{\mp}^{i} = 2\kappa\Theta_{\mp}^{ij}\Big[\kappa\Pi_{\pm ja}\tilde{\Theta}_{\mp}^{ab}\partial_{\mp}y_b - \frac{1}{2}\partial_{\mp}y_j \pm \beta_j^{\pm}\Big]. \tag{32}$$

Using $\Pi_{\pm ab}\Theta_{\mp}^{bi} = -\Pi_{\pm aj}\Theta_{\mp}^{ji}$, we note that

$$\Theta_{\mp}^{ij}\Pi_{\pm ja}\tilde{\Theta}_{\mp}^{ab} = -\Theta_{\mp}^{ic}\Pi_{\pm ca}\tilde{\Theta}_{\mp}^{ab} = -\frac{1}{2\kappa}\Theta_{\mp}^{ib}, \tag{33}$$

and obtain

$$v_{\mp}^{i} = -\kappa\Theta_{\mp}^{i\mu}\partial_{\mp}y_\mu \pm 2\kappa\Theta_{\mp}^{ij}\beta_j^{\pm}. \tag{34}$$

Substituting (34) into (29), the action becomes

$$\begin{aligned} S = \kappa\int d^2\xi\Big[&\partial_+ y_i\Big(\kappa\Theta_-^{ij} - \kappa^2\Theta_-^{ik}\bar{\Pi}_{+kl}\Theta_-^{lj}\Big)\partial_- y_j \\ &+ \partial_+ y_a\Big(-\kappa^2\Theta_-^{aj}\bar{\Pi}_{+jk}\Theta_-^{ki} + \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{ai} - \kappa^2\tilde{\Theta}_-^{ab}\Pi_{+bj}\Theta_-^{ji}\Big)\partial_- y_i \\ &+ \partial_+ y_i\Big(-\kappa^2\Theta_-^{ij}\bar{\Pi}_{+jk}\Theta_-^{ka} + \frac{\kappa}{2}\Theta_-^{ia} - \kappa^2\Theta_-^{ij}\Pi_{+jb}\tilde{\Theta}_-^{ba}\Big)\partial_- y_a \\ &+ \partial_+ y_a\Big(\frac{\kappa}{2}\tilde{\Theta}_-^{ab} - \kappa^2\Theta_-^{ai}\bar{\Pi}_{+ij}\Theta_-^{jb} - \kappa^2\Theta_-^{ai}\Pi_{+ic}\tilde{\Theta}_-^{cb} - \kappa^2\tilde{\Theta}_-^{ac}\Pi_{+ci}\Theta_-^{ib}\Big)\partial_- y_b\Big]. \end{aligned} \tag{35}$$

Using $\bar{\Pi}_{\pm ij}\Theta_{\mp}^{jk} = \Theta_{\mp}^{kj}\bar{\Pi}_{\pm ji} = \frac{1}{2\kappa}\delta_i^k$; $\tilde{\Pi}_{\pm ab}\Theta_{\mp}^{bc} = \Theta_{\mp}^{cb}\tilde{\Pi}_{\pm ba} = \frac{1}{2\kappa}\delta_a^c$; $\Pi_{\pm ab}\Theta_{\mp}^{bi} = -\Pi_{\pm aj}\Theta_{\mp}^{ji}$; $\Pi_{\pm ij}\Theta_{\mp}^{ja} = -\Pi_{\pm ib}\Theta_{\mp}^{ba}$ and $\Theta_{\mp}^{ci}\bar{\Pi}_{\pm ik} = -\tilde{\Theta}_{\mp}^{ca}\Pi_{\pm ak}$, one can rewrite this action as

$$S = \frac{\kappa^2}{2}\int d^2\xi\, \partial_+ y_\mu \Theta_-^{\mu\nu}\partial_- y_\nu. \tag{36}$$

In order to find the background fields argument ΔV^i, we consider the zeroth order of Eq. (34)

$$v_{0\mp}^{i} = -\kappa\Theta_{0\mp}^{i\mu}\partial_{\mp}y_\mu, \tag{37}$$

and conclude that

$$\Delta V^i = -\kappa\theta_0^{i\mu}\Delta y_\mu + (g^{-1})^{i\mu}\Delta\tilde{y}_\mu. \tag{38}$$

Using the integral form of the variables and the relations $\Pi_{\pm ac}\Theta_{\mp}^{cb} + \Pi_{\pm ai}\Theta_{\mp}^{ib} = \frac{1}{2\kappa}\delta_a^b$; $\Theta_{\mp}^{ib} = -2\kappa\bar{\Theta}_{\mp}^{ij}\Pi_{\pm ja}\Theta_{\mp}^{ab}$; $\Theta_{\mp}^{aj} = -2\kappa\tilde{\Theta}_{\mp}^{ab}\Pi_{\pm bi}\Theta_{\mp}^{ij}$, we obtain that $\Delta V^a(\Delta V^i, y^a)$ defined in (19) equals

$$\Delta V^a(\Delta V^i, y_a) = -\kappa \theta_0^{a\mu} \Delta y_\mu + (g^{-1})^{a\mu} \Delta \tilde{y}_\mu. \tag{39}$$

Therefore, we conclude that action (36) is the totally T-dualized action (22).

In this paper we performed the partial T-dualizations and obtained the T-duality chain

$$S[x^\mu] \xrightarrow{\mathcal{T}^a} S_\pi[x^i, y_a] \xrightarrow{\mathcal{T}^i} {}^\star S[y_\mu]. \tag{40}$$

The first action describes the geometrical background, while the second and the third describe the non-geometrical backgrounds with nontrivial fluxes. From this chain one can find the relations between the arbitrary two coordinates in the chain. These general T-duality coordinate transformation laws are used in the investigation of the relations between the Poisson structures of the original, the partially T-dualized and the totally T-dualized theory [5]. Their canonical form will be used in deriving the complete closed string non-commutativity relations, which are the important features of the non-geometrical backgrounds.

Acknowledgements Work supported in part by the Serbian Ministry of Education, Science and Technological Development, under contract No. 171031.

References

1. Becker, K., Becker, M., Schwarz, J.: String Theory and M-Theory: A Modern Introduction. Cambridge University Press, Cambridge (2007); Zwiebach, B.: A First Course in String Theory. Cambridge University Press, Cambridge (2004)
2. Davidović, Lj., Sazdović, B.: Phys. Rev. **D83**, 066014 (2011); J. High Energy Phys. **08**, 112 (2011); Eur. Phys. J. **C72**(11), 2199 (2012)
3. Davidović, Lj., Sazdović, B.: Eur. Phys. J. **C74**(1), 2683 (2014)
4. Buscher, T.: Phys. Lett. **B194**, 51 (1987); **201**, 466 (1988); Ročer, M., Verlinde, E.: Nucl. Phys. **B373**, 630 (1992)
5. Davidović, Lj., Nikolić, B., Sazdović, B.: Eur. Phys. J. **C74**(1), 2734 (2014)
6. Lust, D.: J. High Energy Phys. **12**, 084 (2010); Andriot, D., Larfors, M., Lust, D., Patalong, P.: J. High Energy Phys. **06**, 021 (2013)

100 ГОДИНА ОПШТЕ ТЕОРИЈЕ РЕЛАТИВНОСТИ

САНУ, БЕОГРАД, 23. ЈУН 2015.

www.gravity.ipb.ac.rs/gr100


ЖИВОТ
ЈЕ КАО ВОЖЊА
БИЦИКЛА
ДА БИ ОСТАО
У РАВНОТЕЖИ
МОРАШ СЕ
КРЕТАТИ
A. Einstein

100 ГОДИНА ОПШТЕ ТЕОРИЈЕ РЕЛАТИВНОСТИ

Скуп 100 ГОДИНА ОПШТЕ ТЕОРИЈЕ РЕЛАТИВНОСТИ организовали су чланови пројекта основних истраживања ОН171031 "Физичке импликације модификованог простор-времена" Министарства просвете, науке и технолошког развоја Републике Србије. Група која се бави проблемима гравитације у Београду постоји отприлике од 1979. године и за тих 36 година кроз њу је прошло више од 36 студената и истраживача: данас је број сарадника на пројекту 18 а њихове главне теме истраживања су градијентне теорије гравитације, динамика струна и брана, некомутативна геометрија и некомутативна теорија поља и "loop"-квантна гравитација.

Захваљујемо се МПНТР Републике Србије и Српској академији наука и уметности на финансијској и организационој помоћи.

Научни одбор:
Милутин Благојевић
Маја Бурић
Воја Радовановић
Бранислав Саздовић
Ђорђе Шијачки

Организациони одбор:
Маја Бурић
Марко Војиновић
Љубица Давидовић
Никола Коњик
Душко Латас
Драган Прекрат

Садржај

Гравитациони таласи - шта се то таласа?

Бојан Николић

Институт за физику
Универзитет у Београду
мејл: bnikolic@ipb.ac.rs

100 година опште теорије релативности 2015.
4:43–50

Кључни појмови

гравитациони таласи, ОТР, детекција гравитационих таласа

Резиме

У тренутку настанка опште теорије релативности (ОТР) у физици су били познати механички и електромагнетни таласи. Једна од последица ОТР је постојање гравитационих таласа. Свака маса која врши неко периодично кретање је извор таласа, али су они недетектабилни због високог нивоа шума на фреквенцијама на којима се очекује њихова детекција. Извори гравитационих таласа би могли бити бинарни системи неутронских звезда (ротирају релативно великом фреквенцијом) као и догађаји у којима долази до значајне прерасподеле маса (судари галаксија и сл.). Чињеница је да гравитациони таласи до данас нису директно детектовани али постоје велики експерименти који покушавају то да остваре (LIGO и његови ”наследници”).

1. Увод

Камен бачен у воду изазива појаву трансверзалних таласа на њеној површини, треперење гласних жица омогућава да чујемо саговорника, земљотреси изазивају појаву цунами таласа итд. Све наведено су примери *механичких* таласа. За простирање механичких таласа је потребна материјална средина. Поремећај настао на једном месту преноси се таласом кроз материјалну средину. Механички таласи се не простиру кроз вакуум. Положај честице средине у датом тренутку t у тачки $\vec{r}$ (колоквијално "поремећај") $u(\vec{r},t)$ задовољава хомогену *таласну једначину*

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(\vec{r},t)=0\,. \tag{1}$$

Величина v представља брзину таласа у датој материјалној средини (није једнака брзини честице материјалне средине). Поремећај $u(\vec{r},t)$ може бити ортогоналан на правац простирања таласа (трансверзални талас) или колинеаран са правцем простирања таласа (лонгитудиналан талас).

У другој половини 19. века енглески физичар Џејмс Кларк Мексвел је, обједињавајући дотадашња експериментална сазнања, написао једначине електромагнетног поља познате у литератури као Мексвелове једначине. Једноставна анализа тих једначина показује да у простору где нема наелектрисања и струја електрично $\vec{E}$ и магнетно поље $\vec{B}$ задовољавају хомогене таласне једначине. Простије речено, око простора у коме су задате расподеле наелектрисања и струја постоји електромагнетно (ЕМ) поље. Енергија ЕМ поља се преноси дуж правца који је ортогоналан на векторе јачине електричног и магнетног поља - ЕМ талас је трансверзалан. За разлику од механичких таласа, ЕМ таласи се простиру и кроз вакуум и то највећом брзином у природи $c = 3\times 10^8 m/s$. Херцовим експериментом (1888) потврђено је постојање ЕМ таласа. Питање које су поставили научници тога времена тицало се средине кроз коју се ЕМ талас простире. По аналогији са механичким таласима морала је постојати нека средина која преноси таласе. Тада је уведен појам етера. Међутим, Мајкелсон-Морлијев експеримент као и многа унапређења овог експеримента потврдили су да је брзина светлости иста у свим правцима и да не зависи од избора референтног система - једноставније речено, етера, у облику како су га научници замишљали, нема. И тада (1905) се родила специјална теорија релативности (СТР).

Почетак 20. века физика је "сачекала" са познавањем две врсте таласа. Али човек који је формулисао СТР, Алберт Ајнштајн, вредно је радио на новој теорији гравитације полазећи од једног основног захтева - закони физике морају бити инваријантни на избор референтног система (инерцијалног или неинерцијалног). И дошао је до теорије која је на фундаментално нов начин интерпретирала гравитацију - формулисана је Општа теорија релативности (ОТР) 1915. године.

2. Основе ОТР

У Њутновој теорији гравитације маса је извор гравитационог поља. Свако друго тело одређене масе које се нађе у датом гравитационом пољу је изложено деловању привлачне силе. Њутн је дао аналитички облик за гравитациону интеракцију две тачкасте масе (сила којом тело 1 делује на тело 2)

$$\vec{F}=-G\frac{m_1m_2}{|\vec{r}_2-\vec{r}_1|^3}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)\,, \tag{2}$$

где је $G = 6.67\times 10^{-11}\mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$ Њутнова гравитациона константа. Из Њутновог закона гравитације се види да је сила пропорционална масама тела, обрнуто пропорционална међусобном растојању, привлачна и колинеарна са вектором релативног положаја.

По Њутновој теорији гравитација је СИЛА. И по том питању није било никаквих квалитативних помака до почетка 20. века. А онда се појавио Алберт Ајнштајн, прво са својом специјалном теоријом релативности. Једна од револуционарних ствари коју је Ајнштајн тада увео у физику је обједињеност простора и времена у један просторно-временски континуум тј. време више није параметар већ координата. Један од два постулата СТР захтева инваријантност физичких закона у односу на избор инерцијалног референтног система (други се тиче брзине светлости).

Сам Ајнштајн није био задовољан. Сматрао је да физички закони морају бити инваријантни и односу на избор инерцијалног и неинерцијалног система тј. увидео је да у "причу" мора да укључи и гравитацију. Математичким језиком речено, какву год трансформацију координата да направимо закони физике морају очувати свој облик (строго речено инваријантност на дифеоморфизме).

Овде нећемо улазити у суптилне детаље извођења Ајнштајнових једначина за гравитационо поље. Ајнштајн је једначине извео користећи се законом одржања тензора енргије-импулса као и особинама неких геометријских величина. У савременој литератури извођење иде из одговарајућег дејства применом методе минимума дејства. Било како било, једначине за гравитационо поље су облика

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}\,, \qquad [\mu = 0, 1, 2, 3] \tag{3}$$

где је, најгрубље речено, на левој страни ГЕОМЕТРИЈА, а на десној страни МАТЕРИЈА. Прецизније речено, лева страна једначине је комбинација Ричијевог тензора кривине и скаларне кривине, док је на десној страни тензор енергије-импулса материје/енергије (може се односити и на електромагнетно поље).

Ова једначина успоставља везу између геометрије простор-времена и материје која својим присуством "закривљује" тај простор-време. У Ајнштајновој слици гравитација није сила већ ГЕОМЕТРИЈА простор-времена. Наравно, добра физичка теорија има особину да објашњава познате феномене и предвиђа неке нове. У оквиру Ајнштајнове теорије успешно је објашњена појава скретања светлосних зрака који пролазе близу Сунца, затим прецесија Меркуровог перихела. Теорија предвиђа постојање сингуларитета (основ за теорију Великог праска) као и црних рупа, за чије постојање постоје индиректни докази. Такође једна од последица ОТР је и постојање *гравитационих таласа*.

3. Гравитациони таласи у ОТР

Метод који користимо при математичком опису таласа је метод позадинског поља. Талас (мала пертурбација) се простире кроз простор описан одређеном метриком која задовољава Ајнштајнове једначине.

Математички доказ постојања гравитационих таласа у ОТР је врло једноставан. Уколико посматрамо Ајнштајнове једначине (3) далеко од извора поља (тј. маса) и метрику узмемо у облику

$$g_{\mu\nu} = g^{(0)}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}\,, \tag{4}$$

где је $h_{\mu\nu}$ мала пертурбација (талас) и $g^{(0)}_{\mu\nu}$ метрика простора у коме посматрамо талас, тада Ајнштајнове једначине (уз још неке додатне претпоставке) имају облик таласне једначине

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) h_{\mu\nu} = 0\,, \tag{5}$$

где је c брзина светлости у вакууму. Позадинска метрика $g_{\mu\nu}^{(0)}$ може бити и метрика равног простора као и метрика закривљеног простора[1]. У оба случаја исход је је исти, таласна једначина за малу пертурбацију метрике $h_{\mu\nu}$. Може се даље показати да је талас трансверзалан. Математички делује све поприлично једноставно. Гравитациони таласи постоје уколико је ОТР "добра" теорија. Потврде ОТР у случајевима скретања светлосног зрака, прецесије Меркуровог перихела и индиректан доказ постојања црних рупа нас охрабрују да верујемо у ОТР.

Наравно, логично питање је шта се то таласа. Механичи талас је пренос осцилација кроз околну материјалну средину. Електромагнетни талас је пренос електричног и магнетног поља наелектрисане честице која се креће убрзано (нпр. осцилује). У случају гравитационих таласа, математички речено, таласа се метрика. Растојање између две инфинитезимално блиске тачке у простору са метриком $g_{\mu\nu}(x)$ је

$$ds^2 = \Sigma_{\mu=0}^{3}\Sigma_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x) dx^{\mu} dx^{\nu} \,. \tag{6}$$

Уколико десну страну ставимо под квадратни корен и интегралимо од тачке A до тачке B, добићемо растојање између тачака у закривљеном простору. "Таласање" метрике слободније речено значи и таласање растојање између две тачке. Уколико бисмо детектовали те осцилације растојања између тела то би значило и да смо успели да детектујемо гравитационе таласе.

4. Детекција гравитационих таласа

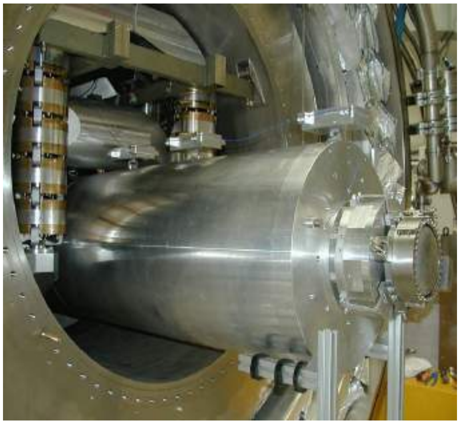
Директна детекција гравитационих таласа је веома компликована због изузетно слабог ефекта који таласи изазивају у детекторима. Амплитуда гравитационог таласа опада са растојањем као $\sim 1/r$. Тако да је веома тешко детектовати и таласе који настају услед спајања црних рупа јер им је амплитуда занемарљиво мала када дођу до Земље. До 2014. године није остварена директна детекција гравитационих таласа. Међутим, постоји низ експеримената који указују на то да гравитациони таласи заиста постоје. На пример, еволуција орбитирања бинарних пулсара потпуно је је у складу са губицима енергије кроз гравитационо зрачење које предвиђа ОТР. За откриће те посебне врсте пулсара додељена је и Нобелова награда 1993. године (Расел Халс и Џозеф Тејлор Јуниор).

Људи непрекидно раде на разним видовима детектора којима би регистровали гравитационе таласе. Први и најједноставнији детектори су тзв. Веберове шипке. Друга група детектора су интерферометарски детектори, а у новије време се развијају и граде високофреквентни детектори гравитационих таласа.

4.1. Веберове шипке

Једноставан уређај за детекцију очекиваног таласног кретања је тзв. Веберова шипка - велика, чврста метална шипка изолована од спољашњих вибрација. Овај тип детектора је био први који је коришћен. Принцип рада овог детектора је једноставан. Упадни гравитациони талас побуђује резонантно осциловање шипке, а шипка онда својим осциловањем појачава тај ефекат на детектабилни ниво. Савремене варијанте оваквих детектора су охлађене до екстремно ниских температура и опремљене квантним интерференционим уређајима за детекцију вибрација (на

[1] Математички, закривљеност простора подразумева да је тензор кривине различит од нуле. Самим тим су и компоненте метрике функције координата простор-времена. Постоји могућност да је тензор кривине нула а да је метрика зависна од координате. У том случају простор је раван и погодним избором координата можемо прећи на метрику равног простора.



Слика 1

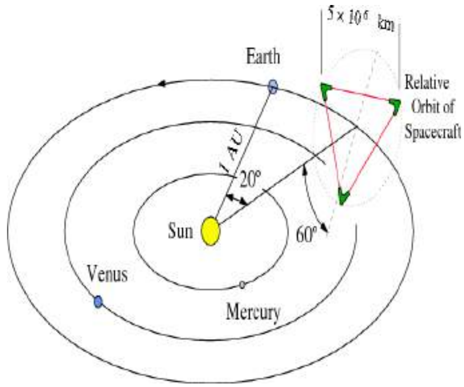
AURIGA детектор

Слика 2

MiniGRAIL детектор

пример, ALLEGRO). Проблем са овим детекторима што се они могу користити само за врло јаке гравитационе таласе.

MiniGRAIL је антена за детекцију гравитационих таласа сферног облика. Ова антена се налази на Универзитету у Лајдену (Холандија), а састоји се од сфере масе 1150 килограма охлађене на температуру 20 mK. Облик сфере омогућава детекцију из свих праваца. Фреквенције које овај детектор најбоље "хвата" су интервалу 2-4 kHz, па је погодан за детекцију гравитационих таласа који настају у бинарним пулсарима и спајањем мањих црних рупа. Сличног типа је ултрахладни детектор AURIGA који се налази на INFN-у у Италији. Он се састоји од алуминијумског цилиндра дужине 3 метра који је охлађен на температуру реда величине $\sim$ mK.



Слика 3

LISA

4.2. Интерферометри

Ова група детектора користи ласерску интерферометрију за детекцију гравитационих таласа. Светлост крећући се кроз простор прати закривљење просторно-временског континума. Принцип рада ових детектора је да се измери ефекат интерференције ласерских зрака при чему је путна разлика настала "скраћивањем" или "издуживањем" простора.

Данас постоје само интерферометри на Земљи. Тренутно најосетљивији интерферометарски детектор је LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory). LIGO има три детектора: један је у Ливингстону (држава Луизијана) а друга два су у Хенфорду (држава Вашингтон). Сви они се састоје од по два велика крака дужине 2-4 километра који су под правим углом. Ласерски зраци путују унутар кракова у цевима дијаметра 1 метар. Промене у дужини које ласерски зрак прелази услед проласка гравитационог таласа би у принципу требало да региструје детектор у виду неке (ласерске) интерференционе слике. Нажалост, LIGO није успео да детектује гравитационе таласе. Очекује се да унапређене верзије овог детектора веће осетљивости (VIRGO, GEO 600, TAMA 300) доведу до детекције гравитационих таласа.

Интерферометарски детектори имају и своја ограничења. Прва од њих је шум који настаје као последица тога што ласерски извор производи фотоне у произвољним тренуцима. Ако уз то користимо и мало јачи ласер онда сами фотони својим импулсом могу да уздрмају детекторска огледала. Други проблем је проблем Брауновог кретања, а ни сеизмички шум се не може занемарити.

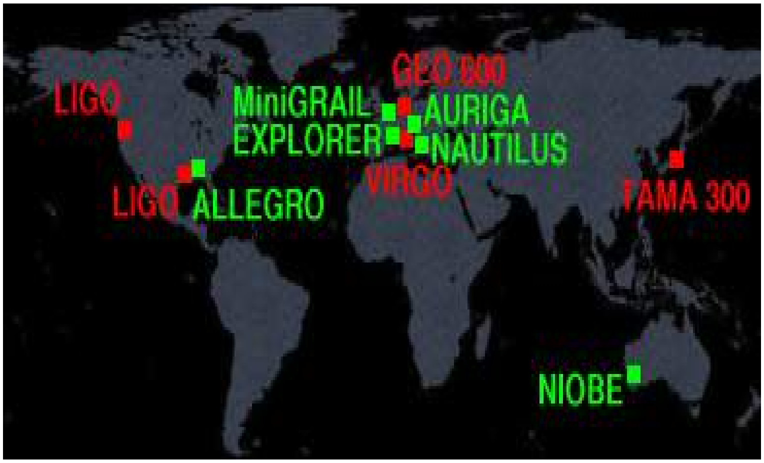
Због проблема које имају земаљски детектори, планира се и градња детектора у орбити око Земље (eLISA). Три сателита би формирала троугао при чему би свака страница била око 5 милиона километара. Тиме се добија добар вакуум, али и даље остаје проблем фотонског шума као и проблем са космичким зрачењем.

4.3. Високофреквентни детектори

Тренутно постоје два оперативна детектора који раде на горњој граници спектра ($10^{-7} - 10^{5}$Hz). Један је на Универзитету у Бирмингему (Енглеска) а други је на INFN-у у Ђенови (Италија). Трећи се гради на Универзитету у Чонкингу (Кина). Детектор у Бирмингему мери промене у стању поларизације микроталасног зрака који кружи по кругу пречника око 1 метра. Детектор у Ђенови је резонантна антена која се састоји од два спрегнута сферна суперпроводна хармонијска

Слика 4

VIRGO детектор



Слика 5

Распред детектора у свету

оцилатора пречника неколико центиметара. Осцилатори када нису спрегнути имају резонантне фреквенције које су скоро једнаке. Кинески детектор би требало да буде у стању да детектује таласе фреквенције реда 10 GHz.

5. Закључак

ОТР је у времену када је настала успела да објасни неке феномене који су били познати научницима попут скретања светлосних зрака у близини великих звезда и прецесију Меркуровог перихела. Свака "права" физичка теорија не објшњава само постојеће и познате феномене већ предвиђа и неке нове. Гравитациони таласи су један од тих феномена. Постојање гравитационих таласа теоријски је поткрепљено општом теоријом релативности јер следи из Ајнштајнових једначина гравитационог поља. Откриће бинарних пулсара (систем две неутронске звезде), који губе енергију потпуно у складу са предвиђањима ОТР, даје експериментални основ постојању гравитационих таласа. Пошто амплитуда таласа опада као са растојањем као $\sim 1/r$ ефекти гравитационог зрачења које се мере на Земљи су врло мали, па је и детекција прилично отежана. Граде се савремени детектори високе осетљивости који дају наду у коначну директну детекцију гравитационих таласа.

ДОДАТНА ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.
2. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergsmon Press, 1971.
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational-wave observatory.

Bojan Nikolic

Unknown affiliation

	All	Since 2013
Citations	148	73
h-index	9	5
i10-index	7	3

TITLE	CITED BY	YEAR
Gauge symmetries decrease the number of Dp-brane dimensions B Nikolić, B Sazdović Physical Review D 74 (4), 045024	24	2006
Gauge symmetries decrease the number of Dp-brane dimensions. II. Inclusion of the Liouville term B Nikolić, B Sazdović Physical Review D 75 (8), 085011	21	2007
D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach B Nikolić, B Sazdović Nuclear Physics B 836 (1-2), 100-126	15	2010
Canonical approach to the closed string non-commutativity L Davidović, B Nikolić, B Sazdović The European Physical Journal C 74 (1), 2734	13	2014
Type I background fields in terms of type IIB ones B Nikolić, B Sazdović Physics Letters B 666 (4), 400-403	13	2008
Can we identify risk factors for postoperative delirium in cardiac coronary patients? Our experience B Nikolić, S Putnik, D Lazovic, M Vranes Heart Surgery Forum 15 (4), E195	11	2012
T-duality diagram for a weakly curved background L Davidović, B Nikolić, B Sazdović The European Physical Journal C 75 (12), 576	10	2015
Fermionic T duality and momenta noncommutativity B Nikolić, B Sazdović Physical Review D 84 (6), 065012	9	2011
Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry B Nikolić, B Sazdović Journal of High Energy Physics 2010 (8), 37	9	2010
T-dualization of type II superstring theory in double space B Nikolić, B Sazdović The European Physical Journal C 77 (3), 197	6	2017
Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality B Nikolić, B Sazdović Journal of High Energy Physics 2012 (6), 101	5	2012

TITLE	CITED BY	YEAR
Aortic dissection in the second trimester of pregnancy: is it possible to save both lives? SM Putnik, BD Nikolić, IA Divac, MN Ristić The heart surgery forum 14 (5), E307-8	5	2011
Fermionic T-duality in fermionic double space B Nikolić, B Sazdović Nuclear Physics B 917, 105-121	3	2017
Noncommutativity and Nonassociativity of Closed Bosonic String on T-dual Toroidal Backgrounds B Nikolić, D Obrić Fortschritte der Physik 66 (4), 1800009	1	2018
Hirurška revaskularizacija miokarda na kucajućem srcu kod bolesnika s lošom funkcijom leve komore S Putnik, M Velinović, A Mikić, M Vraneš, B Nikolić, N Krstić, M Ristić Srpski arhiv za celokupno lekarstvo 139 (7-8), 452-457	1	2011
Surgical revascularization on the beating heart in patients with low ejection fraction S Putnik, M Velinović, A Mikić, M Vraneš, B Nikolić, N Krstić, M Ristić Srpski arhiv za celokupno lekarstvo 139 (7-8), 452-457	1	2011
Cervical pregnancy treated by ligation of the descending branch of the uterine artery M Djurić, B Knezev, P Ristić, M Pavićević, J Djurić, B Nikolić Srpski arhiv za celokupno lekarstvo 112 (9), 949-953	1	1984
T-dualization of a weakly curved background L Davidović, B Nikolić, B Sazdović Journal of Physics: Conference Series 804 (1), 012014		2017
Characteristics of empathy and psychopathy among patological internet users and opiate dependent persons MM Jelkić, M Dolić, I Popović, B Nikolić, I Radulović, K Kolundžija, ... Vojnosanitetski pregled, 285-285		2016
Closed string noncommutativity in the weakly curved background L Davidović, B Sazdović, B Nikolić		2015

Welcome to INSPIRE, the High Energy Physics information system. Please direct questions, comments or concerns to feedback@inspirehep.net.
Hep :: HepNames :: Institutions :: Conferences :: Jobs :: Experiments :: Journals :: Help
Home > Search Results: author:B.Nikolic.1

author:B.Nikolic.1 Bri

find j "Phys.Rev.Lett.,105*" :: more

Sort by: latest first desc. - or rank by -

Display results: 25 results single list

Citesummary excluding self-citations or RPP citations

Generated on 2018-07-03

38 papers found, 37 of them citeable (published or arXiv)

Citation summary results	Citeable papers	Citeable papers excluding self cites	Citeable papers excluding RPP	Published only	Published only excluding self cites	Published only excluding RPP
Total number of papers analyzed:	37	37	37	22	22	22
Total number of citations:	344	234	344	337	231	337
Average citations per paper:	9.3	6.3	9.3	15.3	10.5	15.3
Breakdown of papers by citations:						
Renowned papers (500+)	0	0	0	0	0	0
Famous papers (250-499)	0	0	0	0	0	0
Very well-known papers (100-249)	0	0	0	0	0	0
Well-known papers (50-99)	2	2	2	2	2	2

Known papers (10-49)	9	2	9	9	2	9
Less known papers (1-9)	11	15	11	6	12	6
Unknown papers (0)	15	18	15	5	6	5
h_{HEP} index [?]	10	7	10	10	7	10

Back to citesummary

Warning: The citation search should be used and interpreted with great care.
Read the fine print

RESEARCHERID

THOMSON REUTERS

Home | My Researcher Profile | Refer a Colleague | Logout | Search | Interactive Map | EndNote | Publons

Nikolic, Bojan

Get A Badge | ResearcherID Labs | Your labs page and badge show only your public data | Manage Profile | Preview Public Version

ResearcherID: N-3634-2018
Other Names:
E-mail: bnikolic@ipb.ac.rs
URL: http://www.researcherid.com/rid/N-3634-2018
Subject: Enter a Subject
Keywords: Enter a Keyword
Publons: Link ResearcherID with Publons
ORCID: http://orcid.org/0000-0001-5206-5859

Exchange Data With ORCiD

My Institutions (more details)
Primary Institution: Institute of Physics Belgrade, IPB
Sub-org./Dept:
Role: Researcher (Academic)
Joint Affiliation:
Sub-org./Dept:
Role:
Past Institutions:

Description: Enter a Description
My URLs:

My Publications

My Publications (23)
View Publications
Citation Metrics
Manage | Add

ResearcherID labs
Create A Badge
Collaboration Network
Citing Articles Network

Publication Groups

Publication List 1 (0)
View Publications
Citation Metrics
Manage | Add

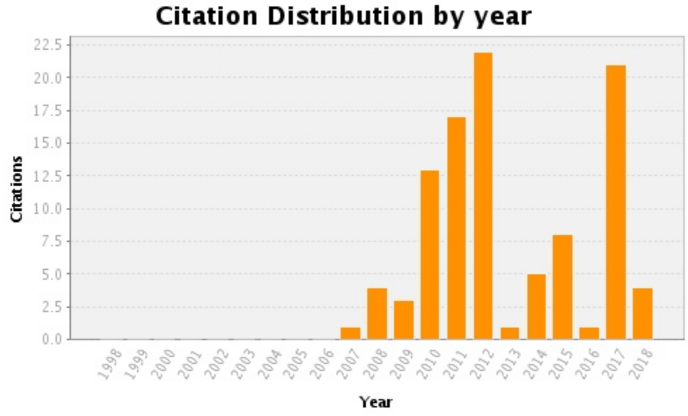
Publication List 2 (0)
View Publications
Citation Metrics
Manage | Add

Help
Refer a Colleague
How to use these lists

My Publications: Citation Metrics

This graph shows the number of times the articles on the publication list have been cited in each of the last 20 years.
Note: Only articles from Web of Science Core Collection with citation data are included in the calculations. More information about these data.

Citation Distribution by year



Total Articles in Publication List: **23**

Articles With Citation Data: **16**

Sum of the Times Cited: **100**

Average Citations per Article: **6.25**

h-index: **7**

Last Updated: **07/05/2018 09:59 GMT**

Community Forum | Register | FAQ
Support | Privacy Policy | Terms of Use | Logout

Scopus Preview

Author search Sources Help Bojan Nikolic

Author details

About Scopus Author Identifier

The Scopus Author Identifier assigns a unique number to groups of documents written by the same author via an algorithm that matches authorship based on a certain criteria. If a document cannot be confidently matched with an author identifier, it is grouped separately. In this case, you may see more than one entry for the same author.

Print Email

Nikolić, Bojan

Follow this Author

University of Belgrade, Institute of Physics Belgrade, Belgrade, Serbia
Author ID: 16234167200

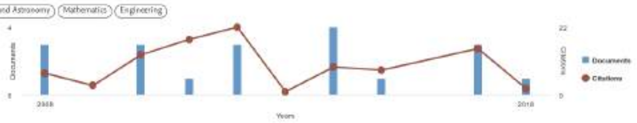
http://orcid.org/0000-0001-5206-5859

View potential author matches

Other name formats: (Nikolić, B.) (Nikolić, B.) (Nikolic, B.) (Nikolić, Bojan)

Subject area: (Physics and Astronomy) (Mathematics) (Engineering)

Document and citation trends:



Get citation alerts + Add to ORCID Request author detail corrections

h-index: 7 View h-graph

Documents by author 23 Analyze author output

Total citations 100 by 34 documents

23 Documents | Cited by 34 documents | 3 co-authors | Author history

View in search results format >

Sort on: Date (newest)

Export all Add all to list Set document alert Set document feed

Document title	Authors	Year	Source	Cited by
Noncommutativity and Nonassociativity of Closed Bosonic String on T-dual Toroidal Backgrounds View abstract Related documents	Nikolić, B., Obrić, D.	2018	Fortschritte der Physik	0
T-dualization of a weakly curved background Open Access View abstract Related documents	Davidović, L., Nikolić, B., Sazdović, B.	2017	Journal of Physics: Conference Series	0
Fermionic T-duality in fermionic double space Open Access View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2017	Nuclear Physics B	2
T-dualization of type II superstring theory in double space Open Access View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2017	European Physical Journal C	2
T-duality diagram for a weakly curved background View abstract Related documents	Davidović, L., Nikolić, B., Sazdović, B.	2015	European Physical Journal C	1
Weakly curved background T-duals View abstract Related documents	Davidović, Lj., Nikolić, B., Sazdović, B.	2014	8th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, MPHYS 2014	0
Complete T-dualization of a string in a weakly curved background View abstract Related documents	Davidović, L., Nikolić, B., Sazdović, B.	2014	Springer Proceedings in Mathematics and Statistics	0
Canonical approach to the closed string non-commutativity View abstract Related documents	Davidović, L., Nikolić, B., Sazdović, B.	2014	European Physical Journal C	7
Closed string noncommutativity in the weakly curved background View abstract Related documents	Davidović, Lj., Nikolić, B., Sazdović, B.	2014	8th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, MPHYS 2014	0
Noncommutativity and T-duality View abstract Related documents	Davidović, L.J., Nikolić, B., Sazdović, B.	2012	Romanian Reports of Physics	0
Supersymmetry of noncommutativity relations View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2012	Romanian Reports of Physics	0
Dirichlet boundary conditions in type IIB superstring theory and fermionic T-duality View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2012	Journal of High Energy Physics	3
Fermionic T duality and momenta noncommutativity View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2011	Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology	7
D5-brane type I superstring background fields in terms of type IIB ones by canonical method and T-duality approach View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2010	Nuclear Physics B	13
Noncommutativity relations in type IIB theory and their supersymmetry View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2010	Journal of High Energy Physics	6
Noncommutativity in space-time extended by Liouville field View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2010	Advances in Theoretical and Mathematical Physics	11
Improved relations between type I and type IIb background fields View abstract Related documents	Nikolic, B., Sazdovic, B.	2008	5th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, MPHYS 2008	0
Type I background fields in terms of type IIB ones View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2008	Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics	11
Central charge contribution to noncommutativity View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2008	Fortschritte der Physik	0
From neuman to dirichlet boundary conditions View abstract Related documents	Nikolić, B., Sazdović, B.	2007	AIP Conference Proceedings	0

Display: 20 results per page 1 2 Top of page

The data displayed above is compiled exclusively from documents indexed in the Scopus database. To request corrections to any inaccuracies or provide any further feedback, please use the Author Feedback Wizard.

Република Србија
МИНИСТАРСТВО ЗА НАУКУ И ТЕХНОЛОШКИ РАЗВОЈ
Комисија за стицање научних звања

Број:06-00-69/902
14.10.2009. године
Београд

На основу члана 22. става 2. члана 70. став 5. Закона о научноистраживачкој делатности ("Службени гласник Републике Србије", број 110/05 и 50/06 - исправка), члана 2. става 1. и 2. тачке 1 – 4.(прилози) и члана 38. Правилника о поступку и начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача ("Службени гласник Републике Србије", број 38/08) и захтева који је поднео

Институт за физику у Београду

Комисија за стицање научних звања на седници одржаној 14.10.2009. године, донела је

ОДЛУКУ
О СТИЦАЊУ НАУЧНОГ ЗВАЊА

Др Бојан Николић

стиче научно звање
Научни сарадник

у области природно-математичких наука - физика

О Б Р А З Л О Ж Е Њ Е

Институт за физику у Београду

утврдио је предлог број 858/1 од 12.06.2009. године на седници научног већа Института и поднео захтев Комисији за стицање научних звања број 875/1 од 15.06.2009. године за доношење одлуке о испуњености услова за стицање научног звања ***Научни сарадник***.

Комисија за стицање научних звања је по предходно прибављеном позитивном мишљењу Матичног научног одбора за физику на седници одржаној 14.10.2009. године разматрала захтев и утврдила да именовани испуњава услове из члана 70. став 5. Закона о научноистраживачкој делатности ("Службени гласник Републике Србије", број 110/05 и 50/06 - исправка), члана 2. става 1. и 2. тачке 1 – 4.(прилози) и члана 38. Правилника о поступку и начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача ("Службени гласник Републике Србије", број 38/08) за стицање научног звања ***Научни сарадник,*** па је одлучила као у изреци ове одлуке.

Доношењем ове одлуке именовани стиче сва права која му на основу ње по закону припадају.

Одлуку доставити подносиоцу захтева, именованом и архиви Министарства за науку и технолошки развој у Београду.

ПРЕДСЕДНИК КОМИСИЈЕ
Др Станислава Стошић-Грујичић,
научни саветник

МИНИСТАР
Божидар Ђелић

РЕПУБЛИКА СРБИЈА
МИНИСТАРСТВО ЗА НАУКУ И ТЕХНОЛОШКИ РАЗВОЈ
БЕОГРАД

Република Србија
МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ,
НАУКЕ И ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА
Комисија за стицање научних звања

Број:660-01-223/20013-14
29.01.2014. године
Б е о г р а д

ИНСТИТУТ ЗА ФИЗИКУ
ПРИМЉЕНО: 04 -03- 2014

Рад. јед.	број	Прилог	Прилог
0801	225/1		

На основу члана 22. става 2. члана 70. став 6. Закона о научноистраживачкој делатности ("Службени гласник Републике Србије", број 110/05 и 50/06 – исправка и 18/10), члана 2. става 1. и 2. тачке 1 – 4.(прилози) и члана 38. Правилника о поступку и начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача ("Службени гласник Републике Србије", број 38/08) и захтева који је поднео

Институт за физику у Београду

Комисија за стицање научних звања на седници одржаној 29.01.2014. године, донела је

ОДЛУКУ
О СТИЦАЊУ НАУЧНОГ ЗВАЊА

Др Бојан Николић

стиче научно звање

Виши научни сарадник

у области природно-математичких наука - физика

О Б Р А З Л О Ж Е Њ Е

Институт за физику у Београду

утврдио је предлог број 673/1 од 28.05.2013. године на седници научног већа Института и поднео захтев Комисији за стицање научних звања број 677/1 од 31.05.2013. године за доношење одлуке о испуњености услова за стицање научног звања ***Виши научни сарадник***.

Комисија за стицање научних звања је по претходно прибављеном позитивном мишљењу Матичног научног одбора за физику на седници одржаној 29.01.2014. године разматрала захтев и утврдила да именовани испуњава услове из члана 70. став 6. Закона о научноистраживачкој делатности ("Службени гласник Републике Србије", број 110/05 и 50/06 – исправка и 18/10), члана 2. става 1. и 2. тачке 1 – 4.(прилози) и члана 38. Правилника о поступку и начину вредновања и квантитативном исказивању научноистраживачких резултата истраживача ("Службени гласник Републике Србије", број 38/08) за стицање научног звања ***Виши научни сарадник,*** па је одлучила као у изреци ове одлуке.

Доношењем ове одлуке именовани стиче сва права која му на основу ње по закону припадају.

Одлуку доставити подносиоцу захтева, именованом и архиви Министарства просвете, науке и технолошког развоја у Београду.

ПРЕДСЕДНИК КОМИСИЈЕ
др Станислава Стошић-Грујичић,
научни саветник
С. Стошић-Грујичић

МИНИСТАР
Проф. др Томислав Јовановић
Јовановић

РЕПУБЛИКА СРБИЈА МИНИСТАРСТВО ПРОСВЕТЕ, НАУКЕ И ТЕХНОЛОШКОГ РАЗВОЈА БЕОГРАД

UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIČKI FAKULTET

MASTER TEZA

Nekomutativnost i neasocijativnost zatvorene bozonske strune

STUDENT: DANIJEL OBRIĆ
MENTOR: DR BOJAN NIKOLIĆ

SEPTEMBAR, 2017

З А П И С Н И К

са X седнице Изборног и Наставно-научног већа одржане у среду 20. септембра 2017. године

Седници присуствује 42 члана Изборног и Наставно-научног већа.

Службено одсутни:	проф. др Маја Бурић проф. др Воја Радовановић проф. др Бећко Касалица доц. др Михајло Ваневић доц. др Иван Виденовић
Оправдано одсутни:	проф. др Владимир Милосављевић проф. др Иванка Милошевић проф. др Татјана Вуковић проф. др Владан Вучковић доц. др Саша Дмитровић доц. др Немања Ковачевић доц. др Драган Реџић доц. др Никола Шишовић Др Милош Скочић Марјан Ћирковић Нора Тркља Светислав Мијатовић
Неоправдано одсутни:	проф. др Илија Марић доц. др Владимир Миљковић

Седница је започела у 11:10 часова одавањем поште минутом ћутања преминулом др Душану Михајловићу, некадашњем доценту и библиотекару Физичког факултета у пензији. Декан Факултета проф. др Јаблан Дојчиловић предложио је, затим, следећи

Д н е в н и р е д

1. Усвајање Записника са IX седнице Изборног и Наставно-научног већа Физичког факултета.

<u>Изборно веће</u>

2. Разматрање предлога катедара у вези са покретањем поступка за избор наставника Физичког факултета и то:
    a) Катедре за физику атома, молекула, јонизованих гасова, плазме и квантну оптику у вези са расписивањем конкурса за избор једног ванредног професора за ужу научну област Физика атома и молекула
    b) катедара Института за метеорологију у вези са расписивањем конкурса за избор једног доцента за ужу научну област Климатологија и примењена метеорологија
3. Усвајање Извештаја Комисије за избор наставника Физичког факултета и то:
    a) једног ванредног професора за ужу научну област Квантна и математичка физика
    b) једног доцента за ужу научну област Физика јонизованих гасова и плазме
    c) једног доцента за ужу научну област Настава физике
4. Покретање поступка за избор НОРЕ ТРКЉА у звање истраживач-сарадник
5. Усва јање Извештаја Комисије за избор у научно звање и то:
    a) др ВЛАДИМИРА СТОЈАНОВИЋА у звање виши научни сарадник
    b) др БРАНИСЛАВЕ МИСАИЛОВИЋ у звање научни сарадник

<u>Наставно-научно веће</u>

6. Одређивање Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације за:

a) ЈАСМИНУ АТИЋ, дипломираног инжењера електротехнике, која је пријавила докторску дисертацију под називом: „ТРАНСПОРТ ЕЛЕКТРОНА, РАЗВОЈ ЛАВИНА И ПРОПАГАЦИЈА СТРИМЕРА У ЈАКО ЕЛЕКТРОНЕГАТИВНИМ ГАСОВИМА“

7. Усвајање Извештаја Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације и одређивање ментора за:
   a) НИКОЛУ ИВАНОВИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „ПРОУЧАВАЊЕ ОБЛИКА СПЕКТРАЛНИХ ЛИНИЈА Ne I И Ne II У ПРИКАТОДНОЈ ОБЛАСТИ АБНОРМАЛНОГ ТИЊАВОГ ПРАЖЊЕЊА“
   b) ВЕЉКА ЈАНКОВИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „EXCITON DYNAMICS AT PHOTOEXCITED ORGANIC HETEROJUNCTIONS“ (Динамика екситона на органским хетороспојевима побуђеним светлошћу)
8. Усвајање Извештаја Комисије за преглед и оцену докторске дисертације и одређивање Комисије за одбрану дисертације за:
   a) АЛЕКСАНДРУ ДИМИТРИЕВСКУ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „MEASUREMENT OF THE *W* BOSON MASS AND THE CALIBRATION OF THE MUON MOMENTUM WITH THE *ATLAS* DETECTOR“ (Мерење масе W бозона и калибрација импулса миона на детектору ATLAS)
   b) ЈЕЛЕНУ ПЕШИЋ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „INVESTIGATION OF SUPERCONDUCTIVITY IN GRAPHENE AND RELATED MATERIALS BASED ON Ab-INITIO“ (Истраживање суперпроводности у графену и сличним материјалима коришћењем ab-initio метода)
   c) ГОРДАНУ МИЛУТИНОВИЋ-ДУМБЕЛОВИЋ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „МЕТОДЕ МЕРЕЊА ОДНОСА ГРАНАЊА ХИГСОВОГ БОЗОНА У ПРОЦЕСИМА $H \rightarrow \mu^+\mu^-$ И $H \rightarrow ZZ^*$ НА 1.4 TeV НА БУДУЋЕМ ЛИНЕАРНОМ СУДАРАЧУ *CLIC*“
9. Усвајање пријављене теме за израду мастер рада, одређивање руководиоца и Комисије за одбрану рада за:
   a) ВЛАДАНА СИМИЋА, студента мастер студија физике, смер Општа физика, који је пријавио мастер рад под називом: "НУМЕРИЧКЕ СИМУЛАЦИЈЕ ПРОЦЕСА ХЛАЂЕЊА ГРАНУЛАРНОГ ГАСА"
   b) МИРЈАНУ РАКИЋЕВИЋ, студента мастер студија физике, смер Општа физика, која је пријавила мастер рад под називом: "ПРОУЧАВАЊЕ ДИЕЛЕКТРИЧНИХ И ОПТИЧКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИЕТИЛЕН ТЕРЕФТАЛАТ МЕМБРАНЕ МОДИФИКОВАНЕ ЈОНСКИМ СНОПОВИМА"
   c) НИКОЛУ ВУЈИЧИЋА, студента мастер студија метеорологије, који је пријавио мастер рад под називом: "КВАЗИ - РЕЗОНАНТНИ РОЗБИЈЕВИ ТАЛАСИ И ПОПЛАВЕ ТОКОМ МАЈА 2014 У СРБИЈИ"
   d) МИЛЕНУ ЛАЗАРЕВИЋ, студента мастер студија метеорологије, која је пријавила мастер рад под називом: "ТРАНСПОРТ САХАРСКОГ ПЕСКА ИЗНАД СРБИЈЕ ТОКОМ ПЕРИОДА 2012-2016"
   e) ДАНИЈЕЛА ОБРИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: "НЕКОМУТАТИВНОСТ И НЕАСОЦИЈАТИВНОСТ ЗАТВОРЕНЕ БОЗОНСКЕ СТРУНЕ"
   f) СТЕВАНА ЂУРЂЕВИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: "УТИЦАЈ ОРИЈЕНТАЦИЈЕ d-WAVE СУПЕРПРОВОДИНИКА НА ЏОЗЕФСОНОВУ СТРУЈУ У СПОЈЕВИМА СА НЕХОМОГЕНИМ ФЕРОМАГНЕТОМ"
   g) МИЛКУ ПОЛЕДИЦА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, која је пријавила мастер рад под називом: "ОДРЕЂИВАЊЕ НЕУТРАЛИЗАЦИОНИХ РАСТОЈАЊА ПРИ ИНТЕРАКЦИЈИ ВИШЕСТРУКО НАЕЛЕКТРИСАНИХ ЈОНА СА ПОВРШИНОМ ЧВРСТОГ ТЕЛА"
   h) НЕМАЊУ СТЕВИЋА, студента мастер студија физике, смер Примењена и компјутерска физика, који је пријавио мастер рад под називом: "ПРОЈЕКТОВАЊЕ И ИЗРАДА МИКРОКОНТРОЛЕРСКОГ ТЕРМОХИГРОМЕТРА "
10. Усвајање пријављене теме за израду дипломског рада, одређивање руководиоца и Комисије за одбрану рада за:
    a) АНДРИЈАНУ ЂОМЛИЈА, апсолвента физике, смер Теоријска и експериментална физика, која је пријавила дипломски рад под називом: "ОДРЕЂИВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ЛАСЕРСКИ ИНДУКОВАНЕ ПЛАЗМЕ АНАЛИЗОМ ВРЕМЕНСКИ РАЗЛОЖЕНИХ СПЕКТРОСКОПСКИХ МЕРЕЊА"
11. Усвајање рецензије рукописа "Аномално ширење спектралних линија водоника у пражњењима" аутора др Николе Цветановића.
12. Давање сагласности Физичког факултета на ангажовање у настави и то:

a) проф. др Лазара Лазића за предмет Метеорологија и Моделовање загађења у атмосфери (на основним студијама Хемија животне средине)
b) проф. др Илије Марића за предмет Философија природних наука (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
c) проф. др Душана Поповића за предмет Физика (на интегисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
d) доц. др Саве Галијаша за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
e) проф. др Владимира Милосављевића за предмет Одабрана поглавља физике (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)и Основи физике (на основним студијама Биохемије)
f) доц. др Славице Малетић за предмет Основи физике (на основним студијама Биохемије)
g) проф. др Братислава Обрадовића за предмет Унапређени оксидациони процеси (на докторским студијама)
h) Марјана Ћирковића за извођење наставе на Шумарском факултету Универзитета у Београду
i) др Браниславе Мисаиловић за извођење наставе из предмета Физика на Војној академији Универзитета одбране

13. Разматрање предлога катедара Института за метеорологију у вези са избором проф. др Иване Тошић за шефа Катедре за општу метеорологију.
14. Питања наставе, науке и финансија.
15. Захтеви за одобрење одсуства.
16. Усвајање извештаја са службених путовања.
17. Дописи и молбе упућене Наставно-научном већу.
18. Обавештења. Текућа питања. Питања и предлози.

Пошто је усвојен предложени Дневни ред, прешло се на

1. <u>тачку</u>

Усвојен је Записник са IX седнице Изборног и Наставно-научног већа Физичког факултета.

<u>Изборно веће</u>

2. <u>тачка</u>

На предлог катедара донета је одлука о покретању поступка за избор наставника Физичког факултета и то:

a) на предлог Катедре за физику атома, молекула, јонизованих гасова, плазме и квантну оптику донета је одлука о расписивању конкурса за избор једног ванредног професора за ужу научну област Физика атома и молекула
Комисија: *др Срђан Буквић, редовни професор ФФ*
др Владимир Милосављевић, редовни професор ФФ
др Братислав Маринковић, научни саветник ИФ

b) на предлог катедара Института за метеорологију донета је одлука о расписивању конкурса за избор једног доцента за ужу научну област Климатологија и примењена метеорологија
Комисија: *др Ивана Тошић, редовни професор ФФ*

др Владимир Ђурђевић, ванредни професор ФФ
др Мирослава Ункашевић, редовни професор ФФ

3. тачка

Поводом Извештаја Комисије за избор наставника Физичког факултета Изборно веће је донело следеће одлуке:

a) након јавног гласања у коме су учествовали редовни и ванредни професори Факултета, једногласно, са 29 гласова ЗА, др ТАТЈАНА ВУКОВИЋ је изабрана у звање ванредног професора за ужу научну област Квантна и математичка физика
b) након јавног гласања у коме су учествовали редовни и ванредни професори и доценти Факултета, једногласно, са 38 гласова ЗА, др НИКОЛА ШИШОВИЋ је изабран у звање доцента за ужу научну област Физика јонизованих гасова и плазме
c) након јавног гласања у коме су учествовали редовни и ванредни професори и доценти Факултета са 37 гласова ЗА и једним УЗДРЖАНИМ гласом, др САША ИВКОВИЋ је изабран у звање доцента за ужу научну област Настава физике

4. тачка

Изборно веће је донело одлуку о покретању поступка за избор НОРЕ ТРКЉА у звање истраживач-сарадник.

Комисија: *др Иван Дојчиновић, ванредни професор ФФ*
др Братислав Обрадовић, ванредни професор ФФ
др Милорад Кураица, редовни професор ФФ

5. тачка

Изборно веће је усвојило Извештај Комисије и донело одлуку о избору у научно звање и то:

a) након јавног гласања у коме су учествовали редовни и ванредни професори Факултета једногласно, са 29 гласова ЗА (од укупно 37 колико чини изборно тело), донета је одлука о избору др ВЛАДИМИРА СТОЈАНОВИЋА у звање виши научни сарадник
b) након јавног гласања у коме су учествовали редовни и ванредни професори и доценти Факултета једногласно, са 38 гласова ЗА (од укупно 53 колико чини изборно тело), донета је одлука о избору др БРАНИСЛАВЕ МИСАИЛОВИЋ у звање научни сарадник

Наставно-научно веће

6. тачка

Одређена је Комисија за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације за:

a) ЈАСМИНУ АТИЋ, дипломираног инжењера електротехнике, која је пријавила докторску дисертацију под називом: „ТРАНСПОРТ ЕЛЕКТРОНА, РАЗВОЈ ЛАВИНА И ПРОПАГАЦИЈА СТРИМЕРА У ЈАКО ЕЛЕКТРОНЕГАТИВНИМ ГАСОВИМА“

Комисија: *др Саша Дујко, виши научни сарадник ИФ*
др Ђорђе Спасојевић, ванредни професор ФФ
др Срђан Буквић, редовни професор ФФ
др Зоран Љ. Петровић, научни саветник ИФ

7. тачка

Усвојен је Извештај Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације и одређен ментор за:

a) НИКОЛУ ИВАНОВИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „ПРОУЧАВАЊЕ ОБЛИКА СПЕКТРАЛНИХ ЛИНИЈА Ne I И Ne II У ПРИКАТОДНОЈ ОБЛАСТИ АБНОРМАЛНОГ ТИЊАВОГ ПРАЖЊЕЊА“

Ментор: *др Никола Шишовић, доцент ФФ*

b) ВЕЉКА ЈАНКОВИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „EXCITON DYNAMICS AT PHOTOEXCITED ORGANIC HETEROJUNCTIONS“ (Динамика екситона на органским хетороспојевима побуђеним светлошћу)

Ментор: *др Ненад Вукмировић, научни саветник ИФ*

8. тачка

Усвојен је Извештај Комисије за преглед и оцену докторске дисертације и одређена Комисија за одбрану дисертације за:

a) АЛЕКСАНДРУ ДИМИТРИЕВСКУ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „MEASUREMENT OF THE *W* BOSON MASS AND THE CALIBRATION OF THE MUON MOMENTUM WITH THE *ATLAS* DETECTOR“ (Мерење масе W бозона и калибрација импулса миона на детектору ATLAS)

Комисија: *др Ненад Врањеш, научни сарадник ИФ*
др Петар Аџић, редовни професор ФФ
др Маја Бурић, редовни професор ФФ
др Воја Радовановић, редовни професор ФФ
др Лидија Живковић, научни саветник ИФ
др Мартен Бонекамп, CEA Saclay, Париз (Француска)

b) ЈЕЛЕНУ ПЕШИЋ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „INVESTIGATION OF SUPERCONDUCTIVITY IN GRAPHENE AND RELATED MATERIALS BASED ON Ab-INITIO“ (Истраживање суперпроводности у графену и сличним материјалима коришћењем ab-initio метода)

Комисија: *др Радош Гајић, научни сарадник ИФ*
др Иванка Милошевић, редовни професор ФФ

др Милан Кнежевић, редовни професор ФФ
др Ђорђе Спасојевић, ванредни професор ФФ
др Зоран Поповић, научни саветник ИНН Винча
dr Kurt Hingerl, Johannes Kepler Univerzitet, Austrija

c) ГОРДАНУ МИЛУТИНОВИЋ-ДУМБЕЛОВИЋ, дипломираног физичара, која је предала докторску дисертацију под називом: „МЕТОДЕ МЕРЕЊА ОДНОСА ГРАНАЊА ХИГСОВОГ БОЗОНА У ПРОЦЕСИМА H→μ+μ− И H→ZZ∗ НА 1.4 TeV НА БУДУЋЕМ ЛИНЕАРНОМ СУДАРАЧУ *CLIC*“

Комисија: *др Иванка Божовић-Јелисавчић, научни саветник ИНН Винча*
др Воја Радовановић, редовни професор ФФ
др Јован Пузовић, ванредни професор ФФ

9. <u>тачка</u>

Усвојена је пријављена тема за израду мастер рада, одређен руководилац и Комисија за одбрану рада за:

a) ВЛАДАНА СИМИЋА, студента мастер студија физике, смер Општа физика, који је пријавио мастер рад под називом: "НУМЕРИЧКЕ СИМУЛАЦИЈЕ ПРОЦЕСА ХЛАЂЕЊА ГРАНУЛАРНОГ ГАСА"

Комисија: *др Слободан Врховац, научни саветник ИФ, руководилац рада*
др Андријана Жекић, ванредни професор ФФ
др Зорица Поповић, доцент ФФ

b) МИРЈАНУ РАКИЋЕВИЋ, студента мастер студија физике, смер Општа физика, која је пријавила мастер рад под називом: "ПРОУЧАВАЊЕ ДИЕЛЕКТРИЧНИХ И ОПТИЧКИХ КАРАКТЕРИСТИКА ПОЛИЕТИЛЕН ТЕРЕФТАЛАТ МЕМБРАНЕ МОДИФИКОВАНЕ ЈОНСКИМ СНОПОВИМА"

Комисија: *др Славица Малетић, доцент ФФ, руководилац рада*
др Душан Поповић, ванредни професор ФФ
др Драгана Церовић, научни сарадник ФФ

c) НИКОЛУ ВУЈИЧИЋА, студента мастер студија метеорологије, који је пријавио мастер рад под називом: "КВАЗИ - РЕЗОНАНТНИ РОЗБИЈЕВИ ТАЛАСИ И ПОПЛАВЕ ТОКОМ МАЈА 2014 У СРБИЈИ"

Комисија: *др Владимир Ђурђевић, доцент ФФ, руководилац рада*
др Катарина Вељовић, доцент ФФ
др Немања Ковачевић, доцент ФФ

d) МИЛЕНУ ЛАЗАРЕВИЋ, студента мастер студија метеорологије, која је пријавила мастер рад под називом: "ТРАНСПОРТ САХАРСКОГ ПЕСКА ИЗНАД СРБИЈЕ ТОКОМ ПЕРИОДА 2012-2016"

Комисија: *др Владимир Ђурђевић, доцент ФФ, руководилац рада*
др Лазар Лазић, редовни професор ФФ

др Катарина Вељовић, доцент ФФ

e) ДАНИЈЕЛА ОБРИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: "НЕКОМУТАТИВНОСТ И НЕАСОЦИЈАТИВНОСТ ЗАТВОРЕНЕ БОЗОНСКЕ СТРУНЕ"
Комисија: *др Бојан Николић, виши научни сарадник ИФ, руководилац рада*
др Воја Радовановић, редовни професор ФФ
др Душко Латас, доцент ФФ

f) СТЕВАНА ЂУРЂЕВИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: "УТИЦАЈ ОРИЈЕНТАЦИЈЕ d-WAVE СУПЕРПРОВОДИНИКА НА ЏОЗЕФСОНОВУ СТРУЈУ У СПОЈЕВИМА СА НЕХОМОГЕНИМ ФЕРОМАГНЕТОМ"
Комисија: *др Зорица Поповић, доцент ФФ, руководилац рада*
др Славица Малетић, доцент ФФ
др Божидар Николић, доцент ФФ
др Предраг Мирановић, редовни професор ПМФ Подгорица

g) МИЛКУ ПОЛЕДИЦА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, која је пријавила мастер рад под називом: "ОДРЕЂИВАЊЕ НЕУТРАЛИЗАЦИОНИХ РАСТОЈАЊА ПРИ ИНТЕРАКЦИЈИ ВИШЕСТРУКО НАЕЛЕКТРИСАНИХ ЈОНА СА ПОВРШИНОМ ЧВРСТОГ ТЕЛА"
Комисија: *др Сава Галијаш, доцент ФФ, руководилац рада*
др Славица Малетић, доцент ФФ
др Владимир Срећковић, виши научни сарадник ИФ

h) НЕМАЊУ СТЕВИЋА, студента мастер студија физике, смер Примењена и компјутерска физика, који је пријавио мастер рад под називом: "ПРОЈЕКТОВАЊЕ И ИЗРАДА МИКРОКОНТРОЛЕРСКОГ ТЕРМОХИГРОМЕТРА "
Комисија: *др Иван Белча, редовни професор ФФ, руководилац рада*
др Бећко Касалица, ванредни професор ФФ
др Ненад Тадић, истраживач сарадник ФФ

10. <u>тачка</u>

Усвојена је пријављена тема за израду мастер рада, одређен руководилац и Комисија за одбрану рада за:

a) АНДРИЈАНУ ЂОМЛИЈА, апсолвента физике, смер Теоријска и експериментална физика, која је пријавила дипломски рад под називом: "ОДРЕЂИВАЊЕ ПАРАМЕТАРА ЛАСЕРСКИ ИНДУКОВАНЕ ПЛАЗМЕ АНАЛИЗОМ ВРЕМЕНСКИ РАЗЛОЖЕНИХ СПЕКТРОСКОПСКИХ МЕРЕЊА"
Комисија: *др Срђан Буквић, редовни професор ФФ, руководилац рада*
др Никола Шишовић, доцент ФФ

др Милош Скочић, истраживач-сарадник ФФ

11. тачка

Наставно-научно веће је усвојило рецензију рукописа "Аномално ширење спектралних линија водоника у пражњењима" аутора др Николе Цветановића и прихватило предлог рецензената да се рукопис публикује као монографско научно дело.

12. тачка

Наставно-научно веће је ДАЛО САГЛАСНОСТ на ангажовање у настави и то:

a) проф. др Лазара Лазића за предмет Метеорологија и Моделовање загађења у атмосфери (на основним студијама Хемија животне средине) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
b) проф. др Илије Марића за предмет Философија природних наука (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
c) проф. др Душана Поповића за предмет Физика (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
d) доц. др Саве Галијаша за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
e) проф. др Владимира Милосављевића за предмет Одабрана поглавља физике (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)и Основи физике (на основним студијама Биохемије) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
f) доц. др Славице Малетић за предмет Основи физике (на основним студијама Биохемије) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
g) проф. др Братислава Обрадовића за предмет Унапређени оксидациони процеси (на докторским студијама) на Хемијском факултету Универзитета у Београду
h) Марјана Ћирковића за извођење наставе на Шумарском факултету Универзитета у Београду
i) др Браниславе Мисаиловић за извођење наставе из предмета Физика на Војној академији Универзитета одбране

Такође, Наставно-научно веће је донело одлуку да пренесе овлашћење на декана Факултета да одобри ангажовања у настави на факултетима са којима имамо споразум о извођењу наставе за све захеве који пристигну накнадно, како наставни процес не би трпео због кашњења других факултета.

13. тачка

На предлог катедара Института за метеорологију донета је одлука да се проф. др Ивана Тошић изабере за шефа Катедре за општу метеорологију.

14. тачка

Питања наставе

Продекан за наставу, доц. др Славица Малетић, обавестила је чланове Већа да је тренутно у току III уписни рок за упис студената у I годину основних студија. Не рачунајући уписни рок који је у току и на коме се за упис пријавило 3 кандидата, ове године смо у I годину уписали укупно 95 студената, по смеровима:

Смер	Уписано Буџет+ Самоф.
Општа физика	14+0
Теоријска и експериментална	35+0
Примењена и компјутерска	21+2
Метеорологија	22+1
Укупно	92+3

Свечани пријем студената одржаће се у петак 29. септембра 2017. године у 12 сати у сали 60 у Цара Душана 13 и продекан је позвала наставнике и сараднике да му присуствују и представе се новим студентима Факултета.

Настава на основним студијама почиње у понедељак 2. октобра, а на мастер студијама две недеље касније, у понедељак 16. октобра.

Због уписа у наредну годину студија, продекан је подсетила наставнике да је све усмене испите потребно завршити до 30. септембра.

На конкурс за ангажовање у настави студената докторских и мастер студија пријавио се 31 кандидат. Сви пријављени кандидати испуњавају услове конкурса. У току идуће недеље ће бити заказан састанак шефова катедара и шефова смерова ради договора о ангажовању пријављених студената и њиховог распореда по предметима.

Питања финансија

Продекан за финансије проф. др Иван Белча обавестио је чланове Већа да ће упутити предлог Савету Факултета за усвајање ребаланса буџета Факултета за ову годину, с обзиром да смо имали непланиране трошкове (санација штете од поплаве, набавка рачунарске опреме ради отказивања постојеће и др).

Питања науке

У одсуству продекана за науку, декан је обавестио чланове Већа да је у току ре-акредитација Факултета као Научно-истраживачке организације.

Још увек нема вести из Министарства о термину расписивања новог конкурса за пројекте.

15. тачка

Наставно-научно веће је одобрило плаћено одсуство наставницима и сарадницима и то:

a) доц. др Ивану Виденовићу у периоду од 18. септембра до 6. октобра 2017. године ради студијског боравка у Међународној агенцији за атомску енергију у Бечу (Аустрија)
b) проф. др Петру Аџићу у периоду од 22. септембра до 10. октобра 2017. године ради присуствовања седницама Савета CERN-а у Женеви (Швајцарска)
c) проф. др Јовану Пузовићу у периоду од 4. до 15. октобра 2017. године ради рада на NA61/SHINE експерименту у Превесину (Француска)
d) Наставно-научно веће је одобрило и неплаћено одсуство др Милошу Бургеру у периоду од 1. октобра до краја текуће године, односно пројектног циклуса, ради наставка усавршавања на Универзитету у Мичигену (САД)

16. тачка

Проф. др Иван Дојчиновић обавестио је дописом чланове Већа о притисцима који се врше на њега како би се повукао са места председника Друштва физичара Србије.

Седница је завршена у 12:25 часова. Наредна седница Изборног и Наставно-научног већа планира се за 18. октобар.

Београд, 26.9.2017.

ДЕКАН ФИЗИЧКОГ ФАКУЛТЕТА
Проф. др Јаблан Дојчиловић, с.р.

UNIVERZITET U BEOGRADU
FIZIČKI FAKULTET

MASTER RAD

T-DUALNOST NA TORUSU PREKO KOMPLEKSNIH PARAMETARA

Student: Milivoje Jojić
Mentor: dr Bojan Nikolić

Beograd, 2015.

З А П И С Н И К

са XI седнице Наставно-научног већа одржане у среду 30. септембра 2015.

Седници присуствује 49 чланова Наставно-научног већа

Службено одсутни:	проф. др Милорад Кураица проф. др Обрадовић Братислав Мирослав Поповић
Оправдано одсутни:	проф. др Срђан Буквић проф. др Стеван Ђениже проф. др Владимир Милосављевић проф. др Владан Вучковић мр Саша Ивковић Марјан Ћирковић Биљана Николић

Декан Факултета проф. др Јаблан Дојчиловић отворио је седницу у 13:15 часова и предложио следећи

Д н е в н и р е д

1. Усвајање Записника са X седнице Изборног и Наставно-научног већа.
2. Избор 11 чланова Савета Физичког факултета из редова наставника за мандатни период 2015-2018 година
3. Одређивање Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације за:
   a) БЛАНКУ ШКИПИНА, дипломираног физичара, која је пријавила докторску дисертацију под називом: „ПОВРШИНСКЕ ФОТОДИЕЛЕКТРИЧНЕ ОСОБИНЕ ПОЛИМЕРНИХ КОМПОЗИТА“
4. Усвајање Извештаја Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације и одређивање ментора за:
   a) МИЛОША ДРАЖИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „ТЕОРИЈА ЕЛЕКТРОНСКОГ ТРАНСПОРТА КРОЗ КВАНТНЕ ТАЧКЕ И МОЛЕКУЛЕ“
5. Усвајање пријављене теме за израду мастер рада, одређивање руководиоца и Комисије за одбрану рада за:
   a) МИЛИВОЈА ЈОЈИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: „Т-ДУАЛИЗАЦИЈА НА ТОРУСУ ПРЕКО КОМПЛЕКСНИХ ПАРАМЕТАРА“
6. Усвајање пријављене теме за израду дипломског рада, одређивање руководиоца и Комисије за одбрану рада за:
   a) ИВАНА ГОРГИЕВСКОГ, апсолвента метеорологије, који је пријавио дипломски рад под називом: „КАРАКТЕРИСТИКА ЛЕТЊИХ И ЗИМСКИХ ОЛУЈА“
7. Разматрање захтева Хемијског факултета у вези са давањем сагласности на ангажовање наставника и сарадника Физичког факултета за школску 2015/2016 годину и то:
   a) проф. др Лазара Лазића за предмет Метеорологија и Моделовање загађења у атмосфери (на основним студијама Хемија животне средине)
   b) проф. др Илије Марића за предмет Философија природних наука (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
   c) проф. др Душана Поповића за предмет Физика (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
   d) доц. др Саве Галијаша за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
   e) проф. др Владимира Милосављевића за предмет Одабрана поглавља физике (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)и Основи физике (на основним студијама Биохемије)

f) доц. др Славице Малетић за предмет Основи физике (на основним студијама Биохемије) и Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
g) доц. др Зорице Поповић за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
h) проф. др Братислава Обрадовића за предмет Унапређени оксидациони процеси (на докторским студијама)

8. Разматрање захтева Биолошког факултета у вези са давањем сагласности на ангажовање проф. др Илије Марића за извођење наставе из предмета Философија природних наука на основним академским студијама Биологија.
9. Избор шефова смерова основних и мастер студија.
10. Питања наставе, науке и финансија.
11. Захтеви за одобрење одсуства.
12. Усвајање извештаја са службених путовања.
13. Дописи и молбе упућене Наставно-научном већу.
14. Обавештења. Текућа питања. Питања и предлози.

Пошто је усвојен предложени Дневни ред, прешло се на

1. <u>тачку</u>

Усвојена је примедба на Записник са претходне седнице коју је изнео проф. др Јован Пузовић. Примедба се односила на тачку 11, став 4 у који треба додати реч „кандидат“, те треба да гласи „кандидат за редовног професора мора имати педагошко искуство у високошколској установи“ (уместо „редовни професор мора имати педагошко искуство у високошколској установи“).

2. <u>тачка</u>

Поводом избора 11 чланова Савета Физичког факултета из редова наставника за мандатни период 2015-2018 година, изабрана је Изборна комисија у саставу:

- проф. др Дејан Јанц
- доц. др Зоран Поповић
- Весна Ковачевић

Савет Физичког факултета из редова запослених на Факултету ће чинити још 2 представника административно-техничког особља и 2 представника истраживача. Они ће своје представнике изабрати на посебним скуповима.

Након што су чланови Већа дали своје предлоге, утврђена је листа кандидата за чланове Савета и то:

1. Буквић Срђан
2. Бурић Маја
3. Вељовић Катарина
4. Вићић Милош
5. Вујовић Драгана
6. Вуковић Татјана
7. Вучковић Владан
8. Димитријевић-Ћирић Марија

9. Дмитровић Саша
10. Дојчиновић Иван
11. Жекић Андријана
12. Касалица Бећко
13. Милошевић Иванка
14. Митровић Мићо
15. Обрадовић Братислав
16. Попарић Горан
17. Поповић Душан
18. Поповић Зорица

Након тога се приступило тајном гласању. Гласало је укупно 47 чланова Већа, чиме је задовољен услов за двотрећинском већином. Комисија је пребројала гласове, те је декан прочитао списак 11 кандидата који су добили највише гласова и који ће бити чланови Савета Физичког факултета за мандатни период 2015-2018 година:

1. Вељовић Катарина
2. Вујовић Драгана
3. Попарић Горан
4. Поповић Зорица
5. Поповић Душан
6. Вучковић Владан
7. Бурић Маја
8. Дојчиновић Иван
9. Жекић Андријана
10. Касалица Бећко
11. Митровић Мићо

3. <u>тачка</u>

Одређена је Комисија за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације за:

а) БЛАНКУ ШКИПИНА, дипломираног физичара, која је пријавила докторску дисертацију под називом: „ПОВРШИНСКЕ ФОТОДИЕЛЕКТРИЧНЕ ОСОБИНЕ ПОЛИМЕРНИХ КОМПОЗИТА“
Комисија: *др Душко Дудић, научни сарадник ИНН Винча*
др Јаблан Дојчиловић, редовни професор ФФ
др Душан Поповић, ванредни професор ФФ
др Драгана Церовић, научни сарадник Висока текстилна струк. школа

4. <u>тачка</u>

Усвојен је Извештај Комисије за оцену испуњености услова и оправданост предложене теме за израду докторске дисертације и одређен ментор за:

a) МИЛОША ДРАЖИЋА, дипломираног физичара, који је пријавио докторску дисертацију под називом: „ТЕОРИЈА ЕЛЕКТРОНСКОГ ТРАНСПОРТА КРОЗ КВАНТНЕ ТАЧКЕ И МОЛЕКУЛЕ“
Ментор: *др Виктор Церовски, виши научни сарадник ИФ*

5. <u>тачка</u>

Усвојена је пријављена тема за израду мастер рада, одређен руководилац и Комисија за одбрану рада за:

a) МИЛИВОЈА ЈОЈИЋА, студента мастер студија физике, смер Теоријска и експериментална физика, који је пријавио мастер рад под називом: „Т-ДУАЛИЗАЦИЈА НА ТОРУСУ ПРЕКО КОМПЛЕКСНИХ ПАРАМЕТАРА“
Комисија: *др Бојан Николић, научни сарадник ИФ, руководилац рада*
др Воја Радовановић, редовни професор ФФ
др Маја Бурић, редовни професор ФФ
Драгољуб Гочанин, истраживач

6. <u>тачка</u>

Усвојена је пријављена тема за израду дипломског рада, одређен руководилац и Комисија за одбрану рада за:

a) ИВАНА ГОРГИЕВСКОГ, апсолвента метеорологије, који је пријавио дипломски рад под називом: „КАРАКТЕРИСТИКА ЛЕТЊИХ И ЗИМСКИХ ОЛУЈА“
Комисија: *др Млађен Ћурић, редовни професор ФФ, руководилац рада*
др Дејан Јанц, ванредни професор ФФ
др Катарина Вељовић, доцент ФФ

7. <u>тачка</u>

На захтев Хемијског факултета Наставно-научно веће је ДАЛО САГЛАСНСТ на ангажовање наставника и сарадника Физичког факултета за школску 2015/2016 годину и то:

a) проф. др Лазара Лазића за предмет Метеорологија и Моделовање загађења у атмосфери (на основним студијама Хемија животне средине)
b) проф. др Илије Марића за предмет Философија природних наука (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
c) проф. др Душана Поповића за предмет Физика (на интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
d) доц. др Саве Галијаша за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
e) проф. др Владимира Милосављевића за предмет Одабрана поглавља физике (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)и Основи физике (на основним студијама Биохемије)

f) доц. др Славице Малетић за предмет Основи физике (на основним студијама Биохемије) и Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
g) доц. др Зорице Поповић за предмет Физика (на основним студијама Хемија и Хемија животне средине и интегрисаним основним и мастер студијама Настава хемије)
h) проф. др Братислава Обрадовића за предмет Унапређени оксидациони процеси (на докторским студијама)

8. <u>тачка</u>

На захтев Биолошког факултета Наставно-научно веће је ДАЛО САГЛАСНОСТ на ангажовање проф. др Илије Марића за извођење наставе из предмета Философија природних наука на основним академским студијама Биологија.

9. <u>тачка</u>

Наставно-научно веће је за руководиоце смерова основних и мастер студија именовало:
- проф. др Јаблана Дојчиловића за руководиоца смера Општа физика
- проф. др Воју Радовановића за руководиоца смера Теоријска и експериментална физика
- проф. др Ивана Белчу за руководиоца смера Примењена и компјутерска физика
- проф. др Лазара Лазића за руководиоца смера Метеорологија

10. <u>тачка</u>

Наставно-научно веће разматрало је списак кандидата пријављених на конкурс за ангажовање студената докторских и мастер студија за извођење дела наставе на основним студијама. Продекан за наставу проф. др Иван Дојчиновић предочио је члановима Већа списак пријављених кандидата од којих је један број кандидата предложио и предметни наставник за извођење наставе из свог предмета, док је један број пријављених кандидат нераспоређен по предметима. Према условима конкурса, потребно је да кандидат има просечну оцену на основним студијама најмање 8.5 и да дужина његових студија не прелази шест година. По овом питању развила се дужа дискусија, с обзиром да четири кандидата које су предложили предметни наставници не испуњавају услове конкурса. Након расправе је донета одлука да ти кандидати не могу бити ангажовани, те је Наставно-научно веће усвојило следећи списак кандидата и њихово ангажовање по предметима:

Р.б.	Име и презиме	Предмет	Година уписа	Година дипломирања	Просечна оцена и смер
1.	Марко Миливојевић	- Механика - Квантна механика I и II - Симетрије у физици	2008.	2012.	9,63 Б
2.	Нора Тркља	- Физика атома - Примењена спектроскопија	2008.	2012.	9,37 Б

		- Лабораторија физике I и II			
3.	Горан Сретеновић	- Лабораторији физике 3 и 4 - Физика (за хемичаре)	2002.	2006.	9,15 А
4.	Милош Скочић	- Лабораторија физике 3 и 4 - Физика јонизованих гасова - Обрада резултата мерења	2005.	2010.	8,53 Ц
5.	Милош Бургер	- Увод у информационе системе	2004.	2010.	9,00 Ц
6.	Бранислава Мисаиловић	- Физика у школи 1 - Физика у школи 2	2005.	2010.	8,71 Ц
7.	Јелена Пајовић	- Физика чврстог стања А, Б, Ц - Лабораторија физике I и II	2007.	2011.	9,85 Б
8.	Биљана Радиша	- Савремена физика I - Методика наставе (ФФХ)	2008.	2012.	9,60 А
9.	Светислав Мијатовић	- Лабораторија физике I и II - Физичка механика - Молекуларна физика и ТД	2009.	2013.	10,00 Б
10.	Петар Бокан	- Лабораторија физике I и II	2008.	2013.	8,98 Б
11.	Драгољуб Гочанин	- Статистичка физика I и II	2009.	2013.	9,84 Б
12.	Вељко Јанковић	- Квантна статистичка физика	2009.	2013.	9,97 Б
13.	Срђан Ставрић	- Теорија кондензованог стања	2009.	2013.	9,92 Б
14.	Драгутин Јовковић	- Лабораторија физике I и II	2009.	2014.	9,13 Б
15.	Стефан Мијин	- Теоријска физика плазме	2011.	2015.	9,97 Б
17.	Катарина Милетић	- Лабораторија физике I и II	2010.	2014.	9,52 Ц
18.	Илија Иванишевић	- Методи математичке физике - Основи математичке физике	2010.	2014.	9,66 Б
19.	Данило Николић	- Основи електродинамике	2011.	2015.	10,00 Б
20.	Ненад Тадић	- Електроника	2006.	2011.	9,07 Ц
21.	Никола Коњик	- Електродинамика I и II - Теорија елементарних честица	2009.	2013.	9,66 Б
22.	Немања Ковачевић	- Метеоролошка мерења	2000.	2005.	9,31 М
23.	Сузана Путниковић	- Општа метеорологија 1 - Климатологија	2006.	2010.	9,73 М
26.	Владимир Чубровић	- Физика (за хемичаре)	2004.	2010.	9,28 Ц

Нераспоређени кандидати:

Р.б.	Име и презиме	Предмет	Година уписа	Година дипломирања	Просечна оцена
1.	Александра Димић		2010.	2014.	10,00 Б
2.	Виолета Станковић		2009.	2014.	8,69 Ц
3.	Милош Вујовић		2008.	2014.	8,62 М
4.	Ана Ђулаковић		2010.	2013.	8,79 А
5.	Ивана Дугалић		2011.	2014.	9,59 А
6.	Марија Јанковић		2010.	2015.	9,95 Б
7.	Јелена Костић		2011.	2014.	9,19 А
8.	Вукашин Милошевић		2011.	2015.	10,00 Б
9.	Јана Петровић		2011.	2014.	9,42 А
10.	Јелена Репић		2011.	2014.	9,19 А
11.	Инес Скоко		2010.	2014.	9,57 М
12.	Весна Стојанац			2012.	8,84 А

Кандидати чије ангажовање није одобрено:

Р.б.	Име и презиме	Предмет	Година уписа	Година дипломирања	Просечна оцена и смер
1.	Милица Васиљевић	- Лабораторија физике 3 и 4	2008.	2014.	8,21 Нови Сад
2.	Иван Крстић	- Физика (за хемичаре)	2003.	2010.	9,11 Ц
3.	Иван Петронијевић	- Физика (за хемичаре)	2001.	2010.	8,06 Ц
4.	Филип Маринковић	- Физика (за хемичаре)	2004.	2010.	8,00 Ц

Након одлуке о кандидатима који ће бити ангажовани у делу наставе на основним студијама, предметни наставник на курсу Физика за студенте хемије, проф. др Душан Поповић, обавестио је Наставно-научно веће да више не жели да изводи наставу на том предмету. Декан је професора Поповића упутио да своју намеру у писменој форми достави Катедри за општи курс физике на првој години студија.

Продекан за наставу проф. др Иван Дојчиновић обавестио је чланове Већа да је на I годину основних студија школске 2015/2016 године уписано 169 студената. У оквиру уписне квоте је уписано 165 студената чиме су попуњена сва места, а 4 студента мимо квоте су уписана по другим основама. Проф. др Иван Дојчиновић је затим подсетио чланове Већа, да је, после 6 година, њему ово последњи дан на месту продекана за наставу, а од нове школске године 1. октобра дужност продекана преузима доц. др Славица Малетић. Наставно-научно веће се проф. др Ивану Дојчиновићу захвалило аплаузом.

11. тачка

Наставно-научно веће је одобрило плаћено одсуство проф. др Душану Поповићу у периоду од 6. до 10. новембра 2015. године ради учешћа на конференцији „6^{th} International Conference on Nanotechnology“ која се одржава у Риму (Италија).

Наставно-научно веће НИЈЕ ОДОБРИЛО продужетак неплаћеног одсуства Мирославу Поповићу, који се се од јануара 2013. године налази на усавршавању на Калифорнијском универзитету у Берклију (САД).

Седница је завршена у 13:30 часова.

Београд, 15.10.2015.

ДЕКАН ФИЗИЧКОГ ФАКУЛТЕТА

Проф. др Јаблан Дојчиловић

Committees

International Advisory Committee

Arefeva Irina (Moscow, Russia)
Bokan Neda (Fac. of Math., Belgrade, Serbia)
Bonora Loriano (Trieste, Italy)
Buric Maja (Fac. of Phys., Belgrade, Serbia)
Dobrev Vladimir (Sofia, Bulgaria)
Doplicher Sergio (Rome, Italy)
Ferrara Sergio (CERN, Geneva, Switzerland)
Henneaux Marc (Brussels, Belgium)
Kac Victor (MIT, Boston, USA)
Kaloper Nemanja (Davis, USA)
Manin Yuri (Bonn, Germany)
Meljanac Stjepan (IRB, Zagreb, Croatia)
Mukhanov Viatcheslav (Munich, Germany)
Nicolai Hermann (Golm, Germany)
Randjbar-Daemi Seifallah (ICTP, Trieste, Italy)
Sazdovic Branislav (Inst. of Phys., Belgrade, Serbia)
Todorov Ivan (Sofia, Bulgaria)
Vladimirov Vasiliy (Moscow, Russia)
Volovich Igor (Moscow, Russia)
Woronowicz Stanislaw (Warsaw, Poland)
Zivaljevic Rade (Math. Inst., Belgrade, Serbia)
Zoupanos George (Athens, Greece)

Local Organizing Committee

Branko Dragovich (Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Sanja Cirkovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Alexandra Dragovich (Moscow, Russia)
Dejan Jokovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Bojan Nikolic (Inst. of Phys., Belgrade)
Voja Radovanovic (Fac. of Phys., Belgrade)
Zoran Rakic (Fac. of Math., Belgrade)
Igor Salom (Inst. of Phys., Belgrade)
Dragan Savic (Inst. of Phys., Belgrade)
Srdjan Vukmirovic (Fac. of Math., Belgrade)

Co-Directors of the School

Branko Dragovich (Belgrade)
Dieter Luest (Munich) (www1, www2)
Viatcheslav Mukhanov (Munich, Germany)
Julius Wess (Munich) (www1, www2)

Secretary of the School

Branislav Jurco (Munich)
Frank Meyer (Munich)

Committees

International Advisory Committee

Loriano Bonora (Trieste, Italy)
Martin Cederwall (Goteborg, Sweden)
Alexandre T. Filippov (Dubna, Russia)
Harald Grosse (Vienna, Austria)
Nemanja Kaloper (Davis, USA)
Petr Kulish (St. Petersburg, Russia)
John Madore (Paris, France)
Gradimir Milovanovic (Nis, Serbia)
Viatcheslav Mukhanov (Munich, Germany)
Hermann Nicolai (Potsdam, Germany)
Anatol Odzijewicz (Bialystok, Poland)
Voja Radovanovic (Belgrade, Serbia)
Seifallah Randjbar-Daemi (Trieste, Italy)
Branislav Sazdovic (Belgrade, Serbia)
Djordje Sijacki (Belgrade, Serbia)
Ivan Todorov (Sofia, Bulgaria)
Josip Trampetic (Zagreb, Croatia)
Mihai Visinescu (Bucharest, Romania)
Vasiliy Vladimirov (Moscow, Russia)
Rade Zivaljevic (Belgrade, Serbia)
Stanislaw Woronowitz (Warsaw, Poland)

International Organizing Committee

Irina Arefeva (Moscow, Russia)
Maja Buric (Belgrade, Serbia)
Vladimir Dobrev (Sofia, Bulgaria)
Branko Dragovich (Belgrade, Serbia)
Dieter Luest (Munich, Germany) (www1, www2)
Zoran Rakic (Belgrade, Serbia)
Igor Volovich (Moscow, Russia)
George Zoupanos (Athens, Greece)

Local Organizing Committee

Branko Dragovich (Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Sanja Cirkovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Branislav Cvetkovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Dusko Latas (Fac. of Phys., Belgrade)
Bojan Nikolic (Inst. of Phys., Belgrade)
Igor Salom (Inst. of Phys., Belgrade)
Dragan Savic (Inst. of Phys., Belgrade)
Marko Vojinovic (Inst. of Phys., Belgrade)

Committees

International Advisory Committee

Loriano Bonora (Trieste, Italy)
Maja Buric (Belgrade, Serbia)
Martin Cederwall (Goteborg, Sweden)
Dieter Luest (Munich, Germany) (www1, www2)
Vladimir Dragovic (Belgrade, Serbia)
Miodrag Mateljevic (Belgrade, Serbia)
Hermann Nicolai (Potsdam, Germany)
Matej Pavsic (Ljubljana, Slovenia)
Branislav Sazdovic (Belgrade, Serbia)
Dmitry Vasilievich Shirkov (Dubna, Russia)
Djordje Sijacki (Belgrade, Serbia)
Ivan Todorov (Sofia, Bulgaria)
Francesco Toppan (Rio de Janeiro, Brasil)
Josip Trampetic (Zagreb, Croatia)
Mihai Visinescu (Bucharest, Romania)
Vasiliy Vladimirov (Moscow, Russia)
Rade Zivaljevic (Belgrade, Serbia)

International Organizing Committee

Irina Arefeva (Moscow, Russia)
Marija Dimitrijevic (Belgrade, Serbia)
Goran Djordjevic (Nis, Serbia)
Vladimir Dobrev (Sofia, Bulgaria)
Branko Dragovich (Belgrade, Serbia)
Anatol Odzijewicz (Bialystok, Poland)
Zoran Rakic (Belgrade, Serbia)
Igor Volovich (Moscow, Russia)
George Zoupanos (Athens, Greece)

Local Organizing Committee

Branko Dragovich (Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Branislav Cvetkovic (Vice Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Ljubica Davidovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Dejan Jokovic (Inst. of Phys., Belgrade)
Bojan Nikolic (Inst. of Phys., Belgrade)
Igor Salom (Inst. of Phys., Belgrade)
Dragan Savic (Inst. of Phys., Belgrade)

7th MATHEMATICAL PHYSICS MEETING: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics

9 - 19 September 2012, Belgrade, Serbia

Main page

General information

Programme

Committees

Lecturers/speakers

Participants

Registration

Accommodation

Poster

Previous meetings

Sponsors

Travel/visa

Proceedings

Photos

Committees

International Advisory Committee

Ignatios Antoniadis (Geneve, Switzerland)
Irina Arefeva (Moscow, Russia)
Loriano Bonora (Trieste, Italy)
Lars Brink (Gothenburg, Sweden)
Maja Buric (Belgrade, Serbia)
Dieter Luest (Munich, Germany) (www1, www2)
Miodrag Mateljevic (Belgrade, Serbia)
Viatcheslav Mukhanov (Munich, Germany)
Hermann Nicolai (Potsdam, Germany)
Anatoly Nikitin (Kyiv, Ukraine)
Emil Nissimov (Sofia, Bulgaria)
Matej Pavsic (Ljubljana, Slovenia)
Stevan Pilipovic (Novi Sad, Serbia)
Branislav Sazdovic (Belgrade, Serbia)
Dejan Stojkovic (Buffalo, USA)
Vasiliy Vladimirov (Moscow, Russia)
Mihai Visinescu (Bucharest, Romania)

International Organizing Committee

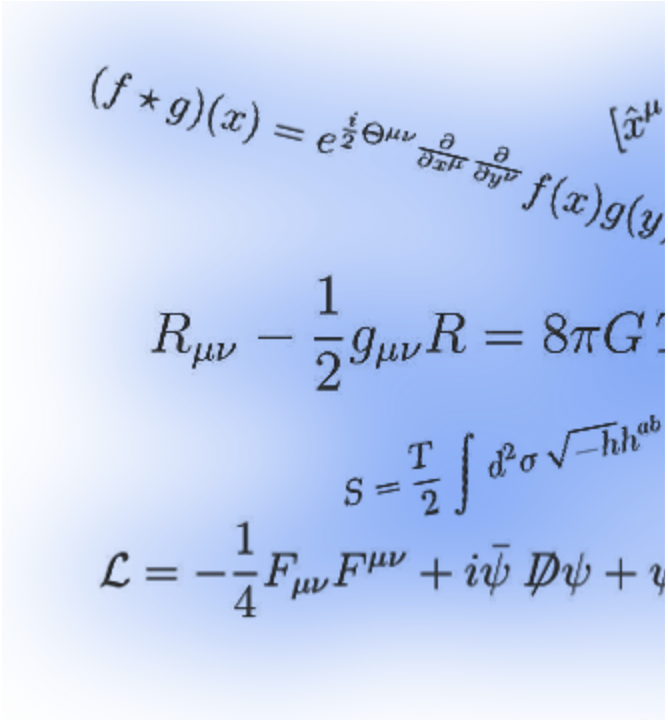
Goran Djordjevic (Nis, Serbia)
Vladimir Dobrev (Sofia, Bulgaria)
Branko Dragovich (Belgrade, Serbia)
Anatol Odzijewicz (Bialystok, Poland)
Zoran Rakic (Belgrade, Serbia)
Igor Volovich (Moscow, Russia)
George Zoupanos (Athens, Greece)

Local Organizing Committee

Branko Dragovich (Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Igor Salom (Vice Chairman, Inst. of Phys., Belgrade)
Branislav Cvetković (Inst. of Phys., Belgrade)

Ljubica Davidović (Inst. of Phys., Belgrade)
Bojan Nikolić (Inst. of Phys., Belgrade)
Dragan Savić (Inst. of Phys., Belgrade)
Marko Vojinović (Inst. of Phys., Belgrade)

Group for GRAVITATION PARTICLES and FIELDS



SEMINARS EVENTS CONTACT LINKS

WELCOME RESEARCH PEOPLE PUBLICATIONS

GPF Gravity II Workshop

Presentations and slides:

- Milutin Blagojević
- Maja Burić
- Branislav Cvetković
- Ljubica Davidović
- Duško Latas
- Luka Nenadović
- Bojan Nikolić
- Voja Radovanović
- Igor Salom
- Marko Vojinović

Help | Contact | RSS | Log in

mathematics and statistics online

Search All or **Browse by** About for Researchers for Librarians for Publishers

Advances in Theoretical and Mathematical Physics

Info Current issue All issues Search

Adv. Theor. Math. Phys.

← Previous issue Next issue →

Volume 14, Number 1

January 2010

Select/deselect all Export citations

Select/deselect all Export citations

International Press publishers of scholarly mathematics

International Press of Boston

Editorial Board
For Authors
Subscriptions

prime COLLECTION

New content alerts

Email
RSS ToC
RSS Article

You have access to this content.

You have partial access to this content.

You do not have access to this content.

Turn Off MathJax

What is MathJax?

GRAVITY and STRING THEORY NEW IDEAS FOR UNSOLVED PROBLEMS III

SEPTEMBER 7-9 2018
ZLATIBOR, SERBIA

HOME ORGANIZATION PROGRAMME PROCEEDINGS PHOTOS

SPEAKERS

PARTICIPANTS

ACCOMMODATION

TRAVEL

PRACTICAL INFO

REGISTRATION FORM

CONTACT

ABOUT ZLATIBOR

Organization

The school is organized by:

- Group for Gravitation, Particles and Fields
- Institute of Physics Belgrade
- Faculty of Physics, University of Belgrade

Scientific Committee:

(to be announced)

Local Organizing Committee:

- Ljubica Davidović Institute of Physics Belgrade
- Bojan Nikolić Institute of Physics Belgrade
- Marko Vojinović Institute of Physics Belgrade

млади физичар

98

Часопис за све пријатеље физике и новца
Издавач Друштво физичара Србије
Школска година 2004/05
http://mf.dfs.org.yu

ISSN 0351-5575

Тема броја ФИЗИКА И НОВАЦ

младифизичар
Садржај 98

младифизичар Часопис за све пријатеље физике
98 Откријте занимљиву физику

Издавач
ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ
Прегревица 118
11080 Београд-Земун
Тел: 011/3160-260 лок. 166
Факс: 011/3162-190
Mail: mf@dfs.org.yu
Web: http://mf.dfs.org.yu

Главни и одговорни уредник
Душко ЛАТАС

Заменици уредника
Бранислав ЦВЕТКОВИЋ и Зорица ПАЈОВИЋ

Уредник интернет издања
Антун БАЛАЖ

Редакција
Слободан БУБЊЕВИЋ, Марко ВОЈИНОВИЋ, Ненад ВУКМИРОВИЋ, Драгана ИЛИЋ, Владимир ЈОВАНОВИЋ, Катарина МАТИЋ, Предраг МИЛЕНОВИЋ, Марија МИТРОВИЋ, Бојан НИКОЛИЋ, Новица ПАУНОВИЋ, Зоран РИСТИВОЈЕВИЋ, Славица СПАСОВИЋ, Владимир ШАМАРА, Милован ШУВАКОВ
Спољни сарадници
проф. др Јарослав ЛАБАТ, проф. др Дарко КАПОР, проф. др Милан ДИМИТРИЈЕВИЋ, проф. др Вукота БАБОВИЋ, др Александар БОГОЈЕВИЋ, др Борко ВУЈИЧИЋ, др Горан ЂОРЂЕВИЋ, др Љубиша НЕШИЋ, Наташа КАДЕЛБУРГ, Наташа ЧАЛУКОВИЋ, Славиша СТАНКОВИЋ, Дејан КРУНИЋ, Милан ЖЕЖЕЉ, Огњен ИЛИЋ, Никола КЕКИЋ, Добросав ОБРАДОВИЋ, Коста РИСТИЋ

Претплата
Весна ВУЧИЋ (011)3160-260/143

YU ISSN 0351-5575

За издавача:
проф. др Илија САВИЋ, Председник Друштва физичара Србије

Претходни уредници “Младог физичара”:
1976/77 Ђорђе БАСАРИЋ и Слободан ЖЕГАРАЦ; 1977/78 Душан РИСТАНОВИЋ и Драшко ГРУЈИЋ; 1978/79-1981/82 Љубо РИСТОВСКИ и Душан КОЛЕДИН; 1982/83 Душан КОЛЕДИН, Драгана ПОПОВИЋ и Јаблан ДОЈЧИЛОВИЋ; 1983/84-1986/87 Драшко ГРУЈИЋ; 1991/92-1993/94 Јаблан ДОЈЧИЛОВИЋ; 1994/95-1996/97 Томислав ПЕТРОВИЋ; 1997/98 Александар СТАМАТОВИЋ; 1998/99 Душан АРСЕНОВИЋ; 1998/99-2003/04 Драган МАРКУШЕВ

Часопис је ослобођен пореза на промет на основу мишљења Министарства просвете Републике Србије бр. 443-00-14/2000-01 од 29. марта 2000.

Сваки пут кад платите додатни час физике или купите карту за биоскоп ви користите новац. Кад мало порастете, почећете и да га зарађујете. Тада ћете схватити да је новац врло важан. А шта је заправо новац? Да ли сте се икад питали како се праве новчанице и како се спречава њихово кривотворење? Ко су људи чији се портрети налазе на њима? Пажљивији међу вама су сигурно приметили да на новчаницама има и формула. Шта оне значе?

Припремајући овај броја “Младог физичара” трудили смо се да одговоримо на ова питања. Верујем да ћете уживати читајући садржај који смо спремили и да ће вас то обогатити. Нећете сазнати којих седам бројева ће бити извучени у следећем колу лотоа и прикупити гомилу новца, ваше богатство ће бити другачије. А какво је оно - откријте сами.

Кад смо већ код новца, морам да вас обавестимо да ће Млади физичар убудуће бити мало скупљи. Сви ви који сте се раније претплатили добићете на време своје примерке, само за нове претплатнике важе нове цене. Ипак, морате призанати да један примерак још увек кошта мање од биоскопске карте. А кад смо већ код биоскопа, вероватно сте гледали “Анђеле 2”. Да ли сте приметили ко је на крају први пољубио Софију? Па наравно, наш редовни читаоц - Марко!

Duško Latas

100 година од Ајнштајнових открића

Ове године се навршава тачно сто година од чувене, и по мишљењу многих, за физику чудесне 1905. Тада је Алберт Ајнштајн објавио три научна рада која ће, како се касније испоставило, променити поглед на свет и изазвати револуцију у науци. Уједињене нације су због тих радова прогласиле ову годину за светску годину физике, коју се у неким земљама назива и Ајнштајновом годином.

Први Ајнштајнов рад је био о фотоелектричном ефекту у коме је доказано да се светлост може понашати као сноп честица са дискретним енергијама. У овом раду је уведен појам кванта енергије као дискретне "порције" енергије која се може предати физичком објетку. Други рад се тицао Брауновог кретања и нудио је експерименталну потврду за теорију о топлоти. Трећи рад је увео специјалну теорију релативности и уздрмао темеље, до тада опште прихваћене, Њутнове механике у коју се безрезервно веровало. За рад о фотоелектричном ефекту Ајнштајн је награђен Нобеловом наградом 1921. године.

Широм света се ова година се обележава на различите начине.

Немачка је 19. јануара започела обележавање. Том приликом је немачки канцелар Герхард Шредер у Берлину отворио низ конгреса, изложби и других манифестација чији је циљ да Ајнштајново дело и његов лик приближи народу. Иако је Ајнштајн 1933. године, због доласка нациста на власт, напустио заувек своју родну земљу, Немачка жели да на овај начин ода почаст "слободном духу, миротворцу, грађанину света и визионару".

Почетак године Ајнштајна званично је обележен и у Великој Британији. Свечаност је одржана у Музеју науке у Лондону уз премијерно извођење салта на бициклу и другим акробацијама. Ову вратоломију је извео Бен Валас, британски шампион у акробатској вожњи бициклом, а осмислила ју је Хелен Церски, физичарка са универзитета у Кембрицу. Она је за ову прилику направила компјутерски модел да би пројектовала салто. Названа Ајнштајнов скок, вратоломија има за циљ да максимално помери границе онога што људи могу да ураде на бициклу. Бицикл је симболично изабран да означи почетак године Ајнштајна у Британији и годину физике у свету, зато што је научник тврдио да је до своје теорије дошао возећи бицикл. Током године у Великој Британији одржаће се на стотине манифестација са играчким тачкама, филмовима и поезијом, да би младима од 11 до 14 година била приближена генијална открића Ал-

младифизичар

Часопис за све пријатеље физике и фудбала
Издавач Друштво физичара Србије
Школска година 2005/06
http://mf.dfs.org.yu
Цена: 175 дин

103

Тема броја **ФИЗИКА И ФУДБАЛ**

ISSN 0351-5575
9 770351 557003

младифизичар

Садржај 103

Примена физике на фудбалском терену

Млади физичар у овом броју борави у предсократској Грчкој. Двадесет векова пре заснивања модерне физике и 150 година пре настанка Аристотеловог списа “Физика” по коме је наука о природи добила име.

младифизичар
Часопис за све пријатеље физике

Издавач
Друштво физичара Србије
Прегревица 118, 11080 Београд-Земун
тел: 011/3160-260 лок. 166, Факс: 011/3162-190
mail: mf@dfs.org.yu
web: http://mf.dfs.org.yu

За издавача:
проф. др Илија Савић, Председник Друштва физичара Србије

Главни уредник и арт директор
Душко Латас

Заменици уредника
Бранислав Цветковић и Зорица Пајовић

Уредник web издања
Антун Балаж

Редакција
Слободан Бубњевић, Марко Војиновић, Никола Веселиновић, Ненад Вукмировић, Марија Димитријевић, Драгана Илић, Владимир Јовановић, Славица Малетић, Катарина Матић, Предраг Миленовић, Марија Митровић, Бојан Николић, Новица Пауновић, Зоран Ристивојевић, Игор Салом, Владимир Шамара, Милован Шуваков

Спољни сарадници
проф. др Јарослав Лабат, проф. др Дарко Капор, др Александар Богојевић, Наташа Каделбург, Наташа Чалуковић, Славиша Станковић, Дејан Крунић, Слободанка Раковић, Игор Ђорић, Милан Жежељ, Огњен Илић, Добросав Обрадовић, Коста Ристић, Димитрије Малетић, Феђа Хаџић, Јелена Станковић, Милија Јовичић

Претплата
Весна Вучић (011)3160-260/143

Штампа
САВПО, Стара Пазова

ISSN 0351-5575
COBISS.SR-ID 53980423

Претходни уредници "Младог физичара":
1976/77 Ђорђе Басарић и Слободан Жегарац; 1977/78 Душан Ристановић и Драшко Грујић; 1978/79-1981/82 Љубо Ристовски и Душан Коледин; 1982/83 Душан Коледин, Драгана Поповић и Јаблан Дојчиловић; 1983/84-1986/87 Драшко Грујић; 1991/92-1993/94 Јаблан Дојчиловић; 1994/95-1996/97 Томислав Петровић; 1997/98 Александар Стаматовић; 1998/99 Душан Арсеновић; 1998/99-2003/04 Драган Маркушев

"Понекад видите прелепе људе без мозга. Понекад имате ружне људе који су интелигентни, попут научника. Наш терен је управо такав. На први поглед делује срамотно, али се лопта по њему креће нормалном брзином." Овако је тренер Челсија Хозе Мурињо одговорио челницима Барселоне, који су имали примедбе на стање у коме се налази травната подлога на Станфорд Бриџу, стадиону Челсија, непосредно пред четвртфинални меч овогодишње Лиге шампиона. С друге стране, аналитичари телевизијског магазина фудбалске Лиге шампиона израчунали су да је чак 90% победника Лиге или Купа шампиона у последњих 20 година носило дресове скроз или делимично црвене боје. Остатак су освојили тимови са потпуно или делимично белим дресовима. Физичари би рекли да успех екипе у Лиги шампиона зависи од таласне дужине светлости коју емитује материјал од којег је начињен дрес, а и сами тренери виде да фудбалски терен личи на научнике. Кад се томе дода да ће 2006. година бити обележена Светским фудбалским првенством у Немачкој, као и сећањем на нашег сународника који нас је најбоље представљао у свету својом изузетном игром главом, било је јасно да морамо мало детаљније да проучимо везе између фудбала и физике. Као резултат тога, настао је овај број Младог физичара - на задовољство свих пријатеља физике и фудбала.

Duško Latas

Највећа галаксија је централна галаксија галактичког грозда Абел 2029 удаљеног 1070 милиона светлосних година у правцу сазвежђа Девице. Ова галаксија има пречник од 5.6 милиона светлосних година што је 80 пута више од пречника наше галаксије, док јој је маса сразмерно томе вероватно пола милиона пута већа и вероватно садржи 100 милиона милијарди звезда. Ако се неко још увек пита има ли живота у свемиру, овде ће га сигурно наћи. Можда је Џорџ Лукас имао у виду баш ову " galaxy far, far away "...

Најсветлији објект у свемиру је квазар APM08279+5255 откривен марта 1998. године у сазвежђу Стрелца. Процењено је да је његова сјајност између 4 и 5 милиона милијарди пута већа од сјајности Сунца или као 50000 просечних галаксија. Астрофизичари верују да су квазари супермасивне црне рупе које гутају колосалне количине материје и делимично је претварају у енергију. Ово је једини познати начин на који би се могла објаснити екстремна сјајност квазара. Овај квазар би морао да прогута читаву једну планету величине Сатурна сваке секунде и претвори је у енергију да би могао да има оволику снагу.

Најсјајнија звезда у нашој галаксији је LBV 1806-20 удаљена 45000 светлосних година од земље, и има сјајност која је процењена на 5 до 40 милиона сјајности Сунца. Маса јој је најмање 150 већа од Сунчеве а пречник најмање 200 пута већи. Ова звезда је толико топла да већину зрачења заправо израчи у ултраљубичастом и делимично чак у рентгенском делу спектра. И поред своје енормне масе, због оволике потрошње енергије ова звезда има веома кратак животни век, реда милион година, што је око 10000 пута мање од процењеног животног века нашег Сунца.

Највиша планина у Сунчевом систему је Олимпус Монс на Марсу. Висина његовог врха од подножја (обзиром да се на Марсу наравно не може дефинисати "надморска" висина) износи 25 км, што је скоро три пута више од Монт Евереста. Но и поред велике висине има веома благ нагиб својих падина обзиром да му је пречник преко двадесет пута већи од висине. Ова планина је чисто вулканског порекла, а оволику висину омогућава нижа марсовска гравитација, 37% земаљске. Оволика планина не би могла постојати на Земљи, јер би се урушила под сопственом тежином, тачније услед огромног притиска у подножју би почела да "тече", слично глечерима.

Најближа црна рупа (која је позната) је удаљена "свега" 1600 светлосних година од Земље и позната је под ознаком V4641 Sgr. Открили су је астрономи са Масачусетског технолошког института јануара 2000. Црна рупа сама по себи јасно не може бити виђена, и једино може бити откривена на основу понашања материје у њеној близини, нпр. ако има звезду пратиоца и ако има довољно материје коју апсорбује при чему се обично јавља јак одлив зрачења, нпр. рентгентског. Сасвим је извесно да постоје и црне рупе које су нам ближе али које су усамљене и као такве немогуће за детекцију било којом познатом техником.

Најсјајнија супернова модерних времена је SN 1987A која је 1987. године експлодирала у Великом Магелановом Облаку, на удаљености од 164000 светлосних година. Иако су већина претходно виђених супернова, нпр. супернове из 1054. или 1604. године, биле знатно сјајније обзиром да су се налазиле у нашој Галаксији, ова супернова је прва супернова од открића телескопа која се појавила у непосредној близини (Велики Магеланов Облак је мала сателитска галаксија наше Галаксије). Све остале супернове су виђене у удаљеним галаксијама. На врхунцу сјајности имала је звездану магнитуду 3 и могла се јасно видети голим оком. Супернове су главни извор свих елемената тежих од гвожђа. Огроман број атома наших тела је некада давно настао у центру супернова, тако да смо сви ми на неки начин "звездана деца".

Рекорде припремио: Новица Пауновић

Тема броја ■■■

Физика и фудбал

СВЕ НАС СПАЈА ФУДБАЛ

Потврда о руковођењу потпројектом

Овим потврђујем да др Бојан Николић (за кога се покреће реизбор у звање виши научни сарадник) у оквиру Групе за гравитацију, честице и поља Института за физику Универзитета у Београду, односно у оквиру пројекта ОН 171031 "*Физичке импликације модификованог простор-времена*" руководи темом "*Т-дуализација отворене и затворене (супер)струне*". На поменутом потпројекту су ангажовани истраживачи: др Бојан Николић, др Бранислав Саздовић, др Љубица Давидовић и студент Илија Иванишевић.

Др Бојан Николић је био представник пројекта ОН 171031 у Научном савету Института за физику Универзитета у Београду у периоду 2011.-2013. године, а у току целог трајања пројекта тј. од 2011. године организационо и административно води део истраживања која се обављају у Институту за физику.

Београд, 3. јул 2018.

Maja Burić

Руководилац пројекта ОН 171031

Проф. др Маја Бурић

LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | ARNOLD SOMMERFELD CENTER FOR THEORETICAL PHYSICS

Dr. Michael Haack
Theresienstr. 37
80333 München
Germany
Telefon: 089/2180-4377
Telefax: 089/2180-4186
michael.haack@lmu.de

Dr. Bojan Nikolic
Institute of Physics
Pregrevica 118
11080 Belgrade
Serbia

January 17, 2012

Invitation for Dr. Bojan Nikolic

To whom it may concern

It is my pleasure to invite Dr. Bojan Nikolic from the Institute of Physics, Belgrade, to visit the Arnold Sommerfeld Center for Theoretical Physics (ASC) at the LMU in Munich.

Dr. Nikolic is being invited to do research within Prof. Lüst's group for mathematical physics and string theory. It is agreed that Dr. Nikolic will visit the ASC in the period of six months from July 1 to December 24, 2012, provided his local expenses in Munich, as well as the required health insurance, will be covered by the home institute in Belgrade.

If you need any further information, please do not hesitate to contact me.

Sincerely,

Michael Haack
Scientific Manager of the Arnold Sommerfeld Center

На основу члана 62. а у вези члана 135. Закона о основама система образовања и васпитања („Службени гласник РС " 72/09,52/2011,55/2013.68/2015), сагласности директора Института за физику бр___. од___.___. 2015. године,

1) ЗЕМУНСКА ГИМНАЗИЈА, са седиштем у улици ГРАДСКИ ПАРК 1 ЗЕМУН (у даљем тексту: Школа), коју заступа директор школе Милош Бјелановић и

2) Бојан Николић, доктор физике , из Београда са станом у улици Валтазара Богишића бр 4, из Београда, (у даљем тексту: Извршилац посла), закључили су:

УГОВОР О ИЗВОЂЕЊУ НАСТАВЕ

Члан 1.

Школа уступа, а Извршилац посла преузима посао који се састоји у извођењу наставе за предмет : РАЧУНСКИ ПРАКТИКУМ 1 и 2 за ученике са посебним способностима за физику одељења __________ у школској 2017/2018 години и то **за 4 часа** недељно, односно- 30% радног времена месечно у периоду од 01.09. 2017. године до краја наставне године односно до 30.06.2017 године.

Члан 2.

Школа има обавезу да за обављени посао исплати све порезе и доприносе у складу са законом и другим општим актима.
Школа ће износ нето накнаде за обављен посао уплатити на текући рачун извршиоца посла.

Члан 3.

Извршилац послова обавезује се да послове обавља савесно и одговорно.
Извођењем послова наставе Извршилац посла не стиче својство запосленог у школи а право на накнаду за обављени рад стиче на основу извештаја о одтжаним часовима наставе.
Извршилац посла учествује у раду стручних органа без права одлучивања, осим у раду одељењског већа.

Члан 4.

Извршилац посла је дужан да ступи на рад 01.09. 2017. Године.

Члан 5.

Уговор престаје да важи и пре истека рока на који је закључен у следећим случајевима:
- споразумом између Школе и Извршиоца посла,
- отказом уговора од стране Школе или Извршиоца посла,
- у другим случајевима утврђеним законом.

Члан 6.

Школа може отказати уговор:

- ако Извршилац посла несавесно, нестручно и неблаговремено обавља послове из овог уговора,
- ако Извршилац посла не поштује радну дисциплину.

Члан 7.

Овај уговор сачињен је у 3 (три) истоветна примерака, (1) један примерак за Извршиоца посла а (2) два за Школу.

ИЗВРШИЛАЦ ПОСЛА

Богдан Николић

ДИРЕКТОР ШКОЛЕ

ДФС је научно-стручна организација физичара, инжењера физичара и осталих који се активно баве физичким наукама и наставом физике на свим нивоима. Циљ ДФС је окупљање свих физичара заинтересованих да заједничким радом доприносе развоју и унапређењу физике као науке, образовања у физици и примењене физике.

Друштво математичара и физичара Србије је основано 1948 године. Први председник Друштва је био Тадија Пејовић професор математике на Универзитету у Београду.

Друштво физичара Србије је званично основано 2. фебруара 1981. године. Први председник Друштва је био Јарослав Лабат, професор на ПМФ-у Универзитета у Београду.

НАСТАВА ФИЗИКЕ Број 3

ISSN 2406-2626

Број 3

НАСТАВА ФИЗИКЕ

Београд 2016.

НАСТАВА ФИЗИКЕ
Број 3, Мај 2016

ДРУШТВО ФИЗИЧАРА СРБИЈЕ

Часопис ***Настава физике*** је публикација Друштва физичара Србије. У часопису се публикују радови из методике наставе физике, историје и филозофије физике и прикази дисертација, монографских и уџбеничких публикација из области наставе физике. Намењен је наставницима физике основних и средњих школа, наставницима физике високих школа струковних студија, као и наставницима факултета који се баве истраживањима у области наставе физике

БЕОГРАД – 2016

Наслов:
„Настава физике"

Поднаслов:
„Зборник предавања, програма радионица, усмених излагања, постер радова и прилога са XXXIV Републичког семинара о настави физике"

Издавач:
Друштво физичара Србије, Београд

Штампарија:
СЗР „Tampon-dizajn„ Панчево

ISSN: 2406-2626

Тираж: 250

CIP - Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

53

НАСТАВА физике : зборник радова са Републичког семинара о настави физике / уредник Љубиша Нешић. - 2015, бр. 1- . - Београд : Друштво физичара Србије, 2015- (Панчево : Tampon-dizajn). - 25 cm

Два пута годишње
ISSN 2406-2626 = Настава физике
COBISS.SR-ID 214910476

Садржај

ПРЕДГОВОР

Поштоване колеге, пред вама се налази трећи број часописа Настава физике. Издавач часописа је ДФС, а планирана су два броја годишње, за сада само у штампаној форми. Први број, као што је случај са овим, био је посвећен Републичком семинару о настави физике. Други број је био посвећен 4. Међународној конференцији о настави физике у средњим школама која је одржана у Алексинцу од 26. до 28. фебруара 2016. године. Почев од наредног броја часопис ће садржавати радове који нису колекција рукописа презентованих на неком стручном или научном скупу. Радови који су штампани у прва три броја часописа такође су прошли стандардну процедуру анонимне рецензије, а одређени број радова је одбијен.

Када је реч о овогодишњем Семинару, на основу акредитације и ранијих искустава, програм обухвата: предавања по позиву, радионице, усмена излагања научно-стручних радова и радова из наставничке праксе, приказе дисретација, монографских и уџбеничких публикација из наставе физике, постер секцију, дискусију у оквиру округлих столова о актуелним темама, изложбе наставних средстава, књига и других публикација.

Предавања по позиву обухватају предавања о Нобеловој награди из физике за 2015. годину, предавања из актуелних области физике (100 година Ајнштајнове теорије гравитације, гравитациони таласи – од теорије до директне детекције, оптика у школској физици), неким аспектима методике наставе физике и приказ три угледна часа физике. У програму су такође и предавања о експерименталном раду из физике прилагођеном ученицима са посебним образовним потребама, приказ изабраних радова из методике наставе физике објављених у светским часописима, студије о светлости, критичком мишљењу у настви физике ... Уз ове радове у Зборнику се такође налазе и радови чије ће теме бити презентоване у оквиру Постер секције.

Ове године на Семинару је предвиђено осам радионица: ЦЕРН Мастерклас, Научна визуелизација у школском простору и на паметном телефону, Креирање онлајн тестова у алату Socrative, Изабране лабораторијске вежбе из физике у гимназији, Школски огледи из области осцилација, Трење – од сложене науке до часа физике и Како да искористим знања из физике и других наука у образовању за одрживи развој.

Београд, 21. април 2016. год

Стручни одбор
XXXIV Републичког семинара о настави физике

Настава физике, број 3, 2016, стр 213 - 221 Стручни рад

Гравитациони таласи – од теорије до директне детекције

Бојан Николић

Институт за физику, Универзитет у Београду, Прегревица 118, 11080 Земун

Апстракт. Пре једног века Алберт Ајнштајн формулисао је Општу теорију релативности (ОТР). Једна од последица Опште теорије релативности је постојање гравитационих таласа. У овом раду ћемо дати кратак теоријски преглед о (гравитационим) таласима, а значајну пажњу ћемо посветити свим сада могућим видовима детекције гравитационих таласа са акцентом на недавни успех – директну детекцију гравитационих таласа.

Кључне речи: гравитациони таласи, ОТР, директна детекција.

УВОД

Камен бачен у воду изазива појаву таласа на њеној површини, треперење гласних жица омогућава да чујемо саговорника, земљотреси изазивају појаву цунами таласа итд. Све наведено су примери *механичких* таласа. За простирање механичких таласа је потребна материјална средина. Поремећај настао на једном месту преноси се таласом кроз материјалну средину. Самим тим механички таласи се не простиру кроз вакуум. Положај честице средине у датом тренутку t у тачки $\vec{r}$ (колоквијално "поремећај") $u(\vec{r},t)$ задовољава хомогену таласну једначину

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u(\vec{r},t)=0\,. \qquad (1)$$

Величина v представља брзину таласа у датој материјалној средини (није једнака брзини честице материјалне средине). Поремећај може бити ортогоналан на правац простирања таласа (трансверзални талас) или колинеаран са правцем простирања таласа (лонгитудиналан талас).

У другој половини 19. века енглески физичар Џејмс Кларк Мексвел је, обједињавајући дотадашња експериментална сазнања, написао једначине електромагнетног поља познате у литератури као Мексвелове једначине. Једноставна анализа тих једначина показује да у простору где нема наелектрисања и струја јачина електричног поља и јачина магнетног поља задовољавају хомогене таласне једначине. Простије речено, око простора у коме су задате расподеле наелектрисања и струја постоји електромагнетно (ЕМ) поље. Енергија ЕМ поља се преноси дуж правца који је ортогоналан на векторе јачине електричног и магнетног поља - ЕМ талас је трансверзалан. За разлику од механичких таласа, ЕМ таласи се простиру и кроз вакуум и то највећом брзином у природи $c = 3\cdot 10^8$ m/s. Херцовим експериментом (1888) потврђено је постојање ЕМ таласа. Питање које су поставили научници тога времена тицало се средине кроз коју се ЕМ талас простире. По аналогији са механичким таласима морала је постојати нека средина која преноси таласе. Тада је уведен појам **етера**. Међутим, Мајкелсон-Морлијев експеримент као и многа унапређења овог експеримента потврдили су да је брзина светлости иста у свим правцима и да не зависи од избора референтног система - једноставније речено, етера, у облику како су га тада научници замишљали, нема. И тада (1905) се родила специјална теорија релативности (СТР).

СТР почива на два постулата. Први се тиче инваријтности облика физичких закона у односу на избор инерцијалног система референце (то је већ био саставни део Галилејевог принципа релативности), док се другим постулатом потврђује експериментлна чињеница да је брзина светлости независна од избора инерцијалног система референце (Ајнштајн не спомиње експлицитно у својим радовима нити Мајкелсон-Морлијев експеримент нити друге сличне експерименте, али други постулат „признаје" резултат тих експеримената).

У СТР се спомињу само инерцијални системи референце. Сам Ајнштајн није био задовољан и сматрао је да физички закони морају имати исти облик независно од избора референтног система, инерцијалног или неинерцијалног, тј. увидео је да у "причу" мора да укључи и гравитацију. Математичким језиком речено, какву год трансформацију координата да направимо закони физике морају очувати свој облик (строго математички речено инваријантност на дифеоморфизме [1,2]). И тако је дошао до Опште теорије релативности (ОТР).

Шта је уопште гравитација? По Њутновој теорији гравитација је **сила**. У Њутновој теорији гравитације **маса је извор гравитационог поља**. Свако друго тело одређене масе које се нађе у датом гравитационом пољу је изложено деловању привлачне силе. Њутн је дао аналитички облик за гравитациону интеракцију свом делу Математички принципи природне филозофије (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) које је први пут објављено 5. јула 1687. године.

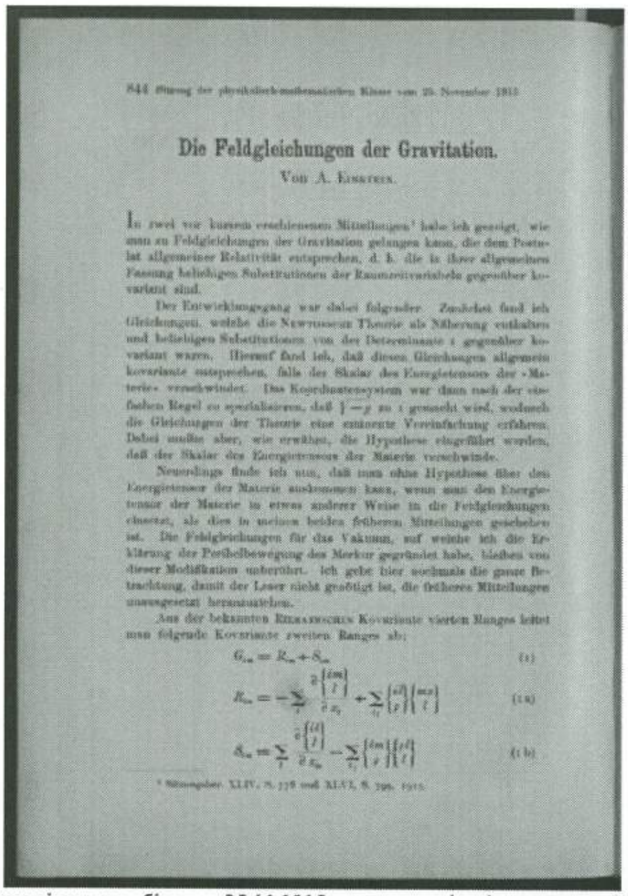
И по том питању није било никаквих квалитативних помака до почетка 20. века. А онда се појавио Алберт Ајнштајн, који је кроз СТР увео у физику обједињеност простора и времена у један просторно-временски континуум тј. време више није параметар већ координата, а са ОТР направио праву револуцију у разумевању гравитације као фундаментлне интеракције у природи.

Овде нећемо улазити у суптилне детаље извођења Ајнштајнових једначина за гравитационо поље. Ајнштајн је једначине извео користећи се законом одржања тензора енергије-импулса као и особинама неких геометријских величина. У савременој литератури извођење иде из одговарајућег дејства применом методе минимума дејства. Било како било, једначине за гравитационо поље су облика

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \tag{2}$$

где је, најгрубље речено, на левој страни ГЕОМЕТРИЈА, а на десној страни МАТЕРИЈА. Ова једначина успоставља везу између геометрије простор-времена и материје која својим присуством "закривљује" тај простор-време. У Ајнштајновој слици гравитација није сила већ **геометрија простор-времена**.

Наравно, добра физичка теорија има особину да објашњава познате феномене и предвиђа неке нове. У оквиру Ајнштајнове теорије успешно је објашњена појава скретања светлосних зрака који пролазе близу Сунца, затим прецесија Меркуровог перихела. Теорија предвиђа постојање сингуларитета (основ за теорију Великог праска) као и црних рупа, за чије постојање постоје индиректни докази. Такође једна од последица ОТР је и постојање *гравитационих таласа*.



Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

СЛИКА 1. Ајнштајнов рад објављен 25.11.1915. године у којем је заснована ОТР и изведена чувена једначина.

ГРАВИТАЦИОНИ ТАЛАСИ

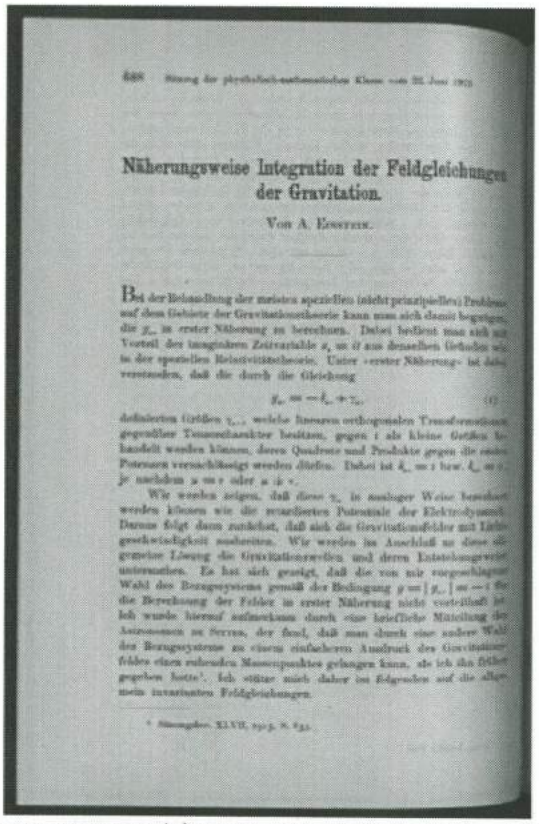
ОТР дозвољава гравитационе таласе

Математички доказ постојања гравитационих таласа у ОТР је врло једноставан. Уколико посматрамо Ајнштајнове једначине у празном простору далеко од маса, онда се испоставља да метрика простора задовољава таласну једначину. Добија се да су гравитациони таласи трансверзални таласи који се простиру брзином светлости у вакуму. У случају механичких таласа материјална средина се таласа, док у случају ЕМ таласа долази до таласања електричног и магнетног поља. Логично питање које се намеће код гравитационих таласа је шта се то таласа?

Формалан одговор је врло прост – таласа се метрика просторно-временског континуума. С обзиром да је по ОТР грвитација у ствари геометрија простор-времена онда је мало „физичкији" одговор – таласа се сам просторно-временски континум. А како се манифестује таласање простор-времена? Посматрајмо растојање између две инфинитезимално блиске тачке

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu. \tag{3}$$

Уколико интегралимо квадратни корен десне стране једначине добићемо растојање између две тачке у закривљеном простору. Очигледно је да ако се метрика таласа онда се и растојање између тачака таласа. Видећемо касније да су све методе директне детекције гравитационих таласа засноване на таласању растојања тј. дужине.



Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

СЛИКА 2. *Приближно решавање једначина гравитационог поља* – математички доказ постојања гравитационих таласа (Ајнштајн, 22.06.1916. година).

ДЕТЕКЦИЈА ГРАВИТАЦИОНИХ ТАЛАСА

Пре него што пређемо на разматрање свих видова директне детекције као и анализе недавног директног мерења гравитационих таласа, потребно је рећи да је постојање гравитационих таласа индиректно потврђено 1993. године.

Године 1974. Расел Алан Халс и руководилац његове докторске тезе Џозеф Хутон Тејлор Јуниор су открили један бинарни пулсар који се састоји од пулсара (неутронске звезде) и пратеће звезде. Овај бинарни пулсар губи енергију на начин како и предвиђа ОТР па самим тим ово откриће је истовремено индиректни доказ постојања гравитационих таласа. За ово откриће Расел и Халс су добили Нобелову награду за физику 1993. године.

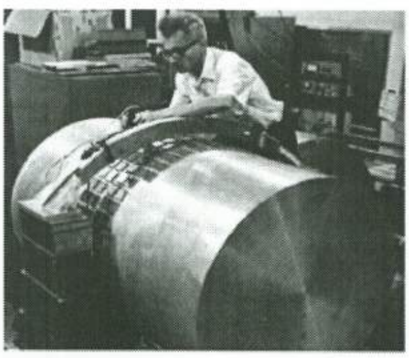
Детектори који се користе за директну детекцију гравитационих таласа деле се у три групе: механички, интерферометарски и високофреквентни детектори.

Механички детектори

Веберове шипке

Једноставан уређај за детекцију очекиваног таласног кретања је тзв. Веберова шипка - велика, чврста метална шипка изолована од спољашњих вибрација. Овај тип детектора је био први који је коришћен од стране конструктора Џозефа Вебера са Универзитета Мериленд. Он је чак тврдио да је детектовао гравитационе таласе, али су његови резултати доведени у сумњу због начина обраде података. Испоставило се на крају да је Веберова детекција гравитационих таласа фингирана због потреба финансирања пројекта.

Принцип рада овог детектора је једноставан. Упадни гравитациони талас побуђује резонантно осциловање шипке, а шипка онда својим осциловањем појачава тај ефекат на детектабилни ниво. Савремене варијанте оваквих детектора су охлађене до екстремно ниских температура и опремљене квантним интерференционим уређајима за детекцију вибрација (на пример, ALLEGRO). Проблем са овим детекторима што се они могу користити само за врло јаке гравитационе таласе.



СЛИКА 3. Џозеф Вебер у својој лабораторији 1965. године

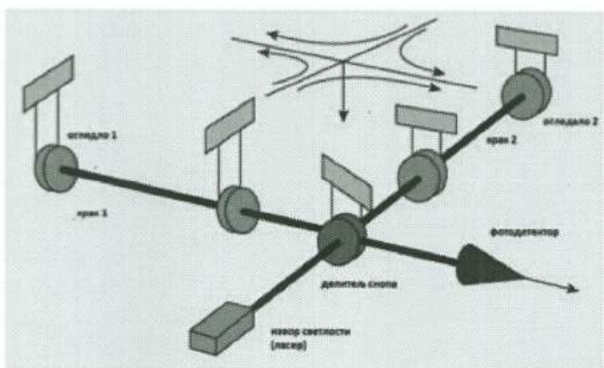
MiniGRAIL

MiniGRAIL је антена за детекцију гравитационих таласа сферног облика. Ова антена се налази на Универзитету у Лајдену (Холандија), а састоји се од сфере масе 1150 килограма охлађене на температуру 20 mK. Облик сфере омогућава детекцију из свих праваца. Фреквенције које овај детектор најбоље "хвата" су интервалу 2-4 kHz, па је погодан за детекцију гравитационих таласа који настају у бинарним пулсарима и спајањем мањих црних рупа. Сличног типа је ултрахладни детектор AURIGA који се налази на INFN-у у Италији. Он се састоји од алуминијумског цилиндра дужине 3 метра који је охлађен на температуру реда величине mK.

СЛИКА 4. Детектор MiniGRAIL

Интерферометарски детектори

Ова група детектора користи ласерску интерферометрију за детекцију гравитационих таласа. Светлост крећући се кроз простор прати закривљење просторно-временског континума. Принцип рада ових детектора је да се измери ефекат интерференције ласерских зрака при чему је путна разлика настала "скраћивањем" или "издуживањем" простора због таласања.



СЛИКА 5. Принцип рада интерферометарског детектора

Данас постоје само интерферометри на Земљи. Тренутно најосетљивији интерферометарски детектор је LIGO (Laser Interferometer Gravitational Wave Observatory). LIGO има три детектора: један је у Ливингстону (држава Луизијана) а друга два су у Хенфорду (држава Вашингтон). Сви они се састоје од по два велика крака дужине 2-4 километра који су под правим углом. Ласерски зраци путују унутар кракова у цевима дијаметра 1 метар. Промене у дужини које ласерски зрак прелази услед проласка гравитационог таласа би у принципу требало да региструје детектор у виду неке (ласерске) интерференционе слике.

Интерферометарски детектори имају и своја ограничења. Прва од њих је шум који настаје као последица тога што ласерски извор производи фотоне у произвољним тренуцима. Ако уз то користимо и мало јачи ласер онда сами фотони својим импулсом могу да уздрмају детекторска огледала. Други проблем је проблем Брауновог кретања, а ни сеизмички шум се не може занемарити.

Због проблема које имају земаљски детектори, планира се и градња детектора у орбити око Земље (eLISA, пројекат започет децембра 2015. године). Три сателита би формирала троугао при чему би свака страница била око 5 милиона километара. Тиме се добија добар вакуум, али и даље остаје проблем фотонског шума као и проблем са космичким зрачењем.

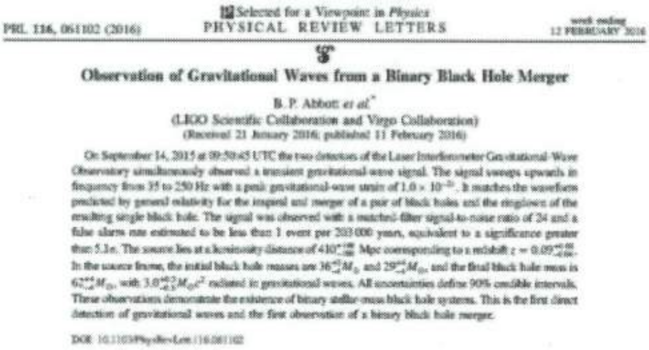
Високофреквентни детектори

Тренутно постоје два оперативна детектора који раде на горњој граници спектра (10^{-7}-10^{5} Hz). Један је на Универзитету у Бирмингему (Енглеска) а други је на INFN-у у Ђенови (Италија). Трећи се гради на Универзитету у Чонкингу (Кина). Детектор у Бирмингему мери промене у стању поларизације микроталасног зрака који кружи по кругу пречника око 1 метра. Детектор у Ђенови је резонантна антена која се састоји од два спрегнута сферна суперпроводна хармонијска оцилатора пречника неколико центиметара. Осцилатори када нису спрегнути имају резонантне фреквенције које су скоро једнаке. Кинески детектор би требало да буде у стању да детектује таласе фреквенције реда 10 GHz.

ДИРЕКТНА ДЕТЕКЦИЈА ГРВИТАЦИОНИХ ТАЛАСА

Група научника из две велике колаборације, LIGO и VIRGO, је објавила 11. фебруара 2016. године [3] да је обављена успешна директна детекција гравитационих таласа. Физички све се одиграло на америчком делу велике колаборације (LIGO).

Дана 14. септембра 2015. године детектори ове колаборације у Хенфорду (Вашингтон) и Ливингстону (Лујзијана) детектовали су гравитациони талас који је настао спајањем две црне рупе, једна масе 36 соларних маса а друга 29 соларних маса. Настала је црна рупа масе 62 соларне масе а 3 соларне масе су израчене у виду гравитационих таласа. Овакав резултат као и профили детектованих сигнала су (у границама грешке) у складу са предвиђањима ОТР. Овај експеримент је потврдио *постојање бинарних система црних рупа, омогућио директну детекцију гравитационих таласа и први детектовао спајање црних рупа.*


PRL 116, 061102 (2016) Selected for a Viewpoint in *Physics* PHYSICAL REVIEW LETTERS week ending 12 FEBRUARY 2016

Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger

B. P. Abbott *et al.**

(LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration)

(Received 21 January 2016; published 11 February 2016)

СЛИКА 6. Апстракт рада [3] у коме је објављена директна детекција гравитационих таласа

Апаратура на којој је извршена детекција је унапређена верзија почетног LIGO детектора (AdvancedLIGO). Побољшања која су урађена првенствено се тичу повећања осетљивости сензора као и умањењу постојећих шумова.

Очекује се да детектори Advanced VIRGO, KAGRA као и могући трећи LIGO детектор у Индији дају додатну потврду овом открићу као и да подигну ниво прецизности и тачности мерења.

ЗАКЉУЧАК

ОТР је у времену када је настала (Први светски рат у пуном јеку!) успела да објасни неке феномене који су били познати научницима попут скретања светлосних зрака у близини великих звезда и прецесију Меркуровог перихела. Свака "права" физичка теорија не објашњава само постојеће и познате феномене већ предвиђа и неке нове. Гравитациони таласи су један од тих феномена. Постојање гравитационих таласа теоријски је поткрепљено Општом теоријом релативности јер следи из Ајнштајнових једначина гравитационог поља. Откриће бинарних пулсара (систем две неутронске звезде), који губе енергију потпуно у складу са предвиђањима ОТР, дало је експериментални основ постојању гравитационих таласа. Са изградњом интерферометарских детектора кренуло се у коначну потрагу за гравитационим таласима. Принципијелно није било препрека и све је било питање прецизности апаратуре. Коначно су у јесен 2015. године научници успели да детектују гравитационе таласе који су настали у једном врло интензивном догађају – судару црних рупа. Ово откриће даје наду да се могу детектовати гравитациони таласи настали после Великог праска што би у „неку руку" био доказ да се тај Прасак стварно и десио.

ЛИТЕРАТУРА

1. C. M. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1973.
2. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, Pergsmon Press, 1971.

3. B. P. Abbott et al., *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** 061102 (2016).

Gravitational waves – from theory to direct detection

Bojan Nikolic

Institute of Physics, University of Belgrade, Pregrevica 118, Zemun

Abstract. A century ago Albert Einstein formulated General Theory of Relativity (GR). The existence of gravitational waves is one of the consequences of the GR. In this article we will give a short theoretical review about (gravitational) waves, and later we will dedicate the great attention to all known types of detection of the gravitational waves with accent on recent success – direct detection of gravitational waves.

Key words: gravitational waves, GR, direct detection.

XXXIV Републички семинар о настави физике

Студентско одмаралиште "Ратко Митровић", Златибор, 12 - 14. мај 2016.

ПРОГРАМ

Четвртак, 12. мај	
08.30-10.00	**Регистрација**
09.00-09.45	**Састанак редакације часописа Настава физике**
10.00-10.15	**Свечано отварање** **Председава: Љубиша Нешић** **Говорници: Иван Дојчиновић, Душанка Обадовић, Милан Распоповић**
10.15-10.45	**И. Бикит, К. Бикит** *Нобелова награда за физику 2015. године: Физика неутрина*
10.45-11.15	**Б. Драговић** *100 година Ајнштајнове теорије гравитације*
11.15-11.45	Кафе пауза; ***Предаја пријава за радионице***
	Председава: Мирјана Поповић-Божић
11.45-12.15	**Б. Николић** *Гравитациони таласи - од теорије до директне детекције*
12.15-12.35	***Љ. Нешић, Л. Раденковић*** *Часопис НАСТАВА ФИЗИКЕ и његов значај за методику наставе физике*
12.35-12.55	**А. Жекић, М. Поповић-Божић, Б. Радиша, Б. Мисаиловић** *Прелиставајући и читајући међународне часописе у области истраживачког образовања у физици*
12.55-13:15	**Т. Јовановић, Б. Јовановић** *Настава физике на медицинском факултету у Нишу од оснивања до данас*
13.15-15.00	**Пауза за ручак**
15.00-16.30	Радионице - прва група **I** ЦЕРН Мастерклас, **(Ј. Милисављевић, И. Стојановић, С. Митић, Т. Марковић Топаловић, М. Радић, М. Ристановић)** **II** Научна визуелизација у школском простору и на паметном телефону, **(С. Булат, М. Давидовић, Љ. Иванчевић, М. Јоксимовић, Т. Марковић-Топаловић, М. Поповић-Божић, Б. Стојичић)** **III** Изабране лабораторијске вежбе из физике у гимназији **(М. Ковачевић, С. Ковачевић, А. Марковић, Д. Карајовић)** **IV** Како да искористим знања из наука у образовању за одрживи развој, **(С. Јокић, Љ. Јокић)**
16.30-17.00	**Кафе пауза**
17.00-18.30	**Округли сто (две теме по 45 минута свака):** **Тема 1: Популаризација физике (И. Дојчиновић, М. Степић, Т. Продановић, С. Ивковић)** **Тема 2: Реформа образовања и положај физике (Т. М. Топаловић, М. Ковачевић, О. Клисурић, А. Хрлец)**
18.30-20.00	**Седница савета одељења за основно образовање ДФС** / **Седница савета одељења за средње образовање ДФС**

Петак, 13. Мај	
Време	Председава: Маја Стојановић
09.00-09.20	**М. Бошњак Степановић** *Приказ дисертације: Примена истраживачке методе у реализацији физичких садржају почетној настави природних наука*
09.20-09.40	***Г. Хајдуковић Јандрић*** *Приказ дисертације: Развој наставних инструкција у активној настави физике*
09.40-10.00	**Д. Радловић Чубрило** *Приказ дисертације: Ефекти примене мултимедије у настави физике у првом разреду средње стручне школе*
10.00-10.15	***М. Стојановић, М. Ковачевић, Љ. Костић*** *Приказ монографије «Поглавља методике наставе физике» Љубише Нешића*
10.15-10.30	***М. Поповић-Божић, А. Жекић*** *«Колегијално подучавање». Превод књиге «Peer Instruction» од Ерика Мазура*
10.30-11.00	**О. Зајков, Б. Митревски** *Физика и критичко мишљење*
11.00-11.30	**Кафе пауза**
	Председава: Душанка Обадовић
11.30-12.00	**Ф. Соколић** *Што је то свјетлост?*

12.00-12.30	**В. Бабовић** *Осветлити и просветлити: Говор сенки у школској физици*
12.30-12.50	**М. Давидовић, Д. Васиљевић, М. Божић** *Дифракција ласерске светлости на оштрој ивици*
12.50-13.20	**И. Авиани** *Физика водене површине*
13.20-16.00	Пауза за ручак; ***Постављање постера***
13.30-15.30	**Скупштина ДФС**
16.00-17.30	**Радионице - друга група** I Креирање онлајн тестова у алату Socrative **(М. Дороцки, В. Ал. Младеновић, С. Николић, Ј. Радовановић)** II Анализа неколико школских огледа из области осцилација, **(М. Радовић, Д. Радивојевић)** III Трење – од сложене науке до часа физике, **(Љ. Нешић, Л. Раденковић, М. Јонић)** IV Физика водене површине, **(И. Авиани)**
17.30-19.00	**Постер секција**
20.30 -	**Свечана вечера**

Субота, 14. мај

Време	Председава: Андријана Жекић
09.30-09.50	**В. Младеновић, Ј. Радовановић, М. Дороцки** *Основни принципи Peer Instruction и Just in Time Teaching наставних стратегија у функцији концептуалне наставе физике*
09.50-10.10	**М. Петковић, М. Стојановић** *Експериментални рад у одељењима са ученицима са сметњама у развоју*
10.10-10.30	**Љ. Нешић, С. Николић** О дометима употребе ИКТ у настави физике
	Председава: Милутин Степић
10.30-10.50	**И. Круљ** *Угледни час: Одређивање нивоа буке у школи*
10.50-11.10	**Ј. Милосављевић, И. Стојановић, С. Митић** *Угледни час: Физика и Ексел – графичко приказивање зависности физичких величина*
11.10-11.30	**С. Илић, Б. Живковић** *Угледни час: Топлотно ширење тела. Појам и мерење температуре*
11.30-12.00	**Пауза за кафу**
	Председава: Милан Ковачевић
12.00-12.15	**Н. Стевановић, В. Марковић, Д. Љубенковић** *Одређивање карактеристика магнетика*
12.15-12.30	**С. Булат** *Мобилни телефон у редовној, додатној и инклузивној настави физике*
12.30-12.45	**В. Марковић, Н. Стевановић, Д. Рајковић** *Карактеристике редног РЛЦ кола*
12.45-13.00	**М. Јовић Лучић, М. Нагл, М. Јоксимовић, Ј. Воларовић, Љ. Иванчевић** *Истраживање о проблемима и потребама ученика основне и средње школе у настави физике*
13.00-13.15	**М. Нагл, Н. Гледић** *Франк-Херцов експеримент*
13.15-13.30	**Ј. Булуковић, Ј. Слишко** *Ученичка објашњења демонстрације бестежинског стања са боцом и млазом воде*
13.30-13.45	**М. Смиљанић Мутавџић, И. Симовић** *Прилози наставној пракси професора физике за први разред гимназије*
13.45-14.00	**Свечано затварање**

Subject **Re: RS2016**
From Ljubisa Nesic <nesiclj@junis.ni.ac.rs>
To Bojan Nikolic <bnikolic@ipb.ac.rs>, Ivan Dojcinovic <ivan.dojcinovic@ff.bg.ac.rs>
Date 2016-02-23 14:07

webmail

Dragi Bojane,
drago mi je sto si privhatio da drzis predavanje o talasima.
prosledjujem tvoj mail predsedniku DFS. Nadam se da ce ti dati odgovarajuca uputstva.

Ljubisa

On 2/23/2016 1:54 PM, Bojan Nikolic wrote:

> Dragi Ljubisa,
>
> hvala na pozivu. Sve je jasno sem jednog tehnickog detalja. Sta ja tacno treba da uradim da bih bio clan DFS? Kome treba da platim i koliko?
>
> Pozdrav,
> Bojan
>
> On 22 Feb 2016 17:05, rep.seminar@ff.bg.ac.rs wrote:
>
> > Postovani Bojane,
> > imam izuzetno zadovoljstvo da vas, ispred Strucnog odbora republickog seminara o nastavi fizike za 2016. godinu (http://www.dfs.rs/seminar2016/), pozovem da odrzite plenarno predavanje vezano za otkrice gravitacionih talasa.
> > Seminar ce biti odrzan na Zlatiboru od 12. do 14. maja a rok za pisanje rada je 14. mart. Radovi ce, nakon recenzije, biti objavljeni u 3. broju casopisa Nastava fizike koji smo pokrenuli prosle godine.
> > Na sajtu seminara mozete naci i upustvo za pisanje rada, odnosno odgovarajuci template a vi, kao predavac po pozivu, imate na raspolaganju do 10 strana. Ukoliko imate bilo kakav tehnicki problem slobodno se obratite. DFS ce snositi troskove vaseg puta i smestaja ali je potrebno da budete clan drustva.
> > Imajte u vidu da ce na seminaru biti takodje i jedno uvodno predavanje o OTR.
> >
> > Ljubisa Nesic
> > predsednik Komisije za seminare DFS